

平成 25 年度（前期日程）

入学者選抜学力検査問題

数 学

(120 分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計4枚）の受験番号記入欄（合計8箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で4問あり、2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 一辺の長さが 1 の正十角形 D が平面上にある。 D の外接円を C とおき、 C の中心を O 、 C の半径を R とおく。 D の頂点 $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ は C 上でこの順に反時計回りに並んでいるとする。点 P_2, P_3 から直線 OP_1 へ下ろした垂線をそれぞれ P_2H_2, P_3H_3 とする。

- (1) $R = \frac{1}{2 \sin \theta_1}$ を満たす θ_1 ($0^\circ < \theta_1 < 90^\circ$) を求めよ。
- (2) $P_1H_2 = \sin \theta_2, H_2H_3 = \cos \theta_3$ を満たす θ_2, θ_3 ($0^\circ < \theta_2 < 90^\circ, 0^\circ < \theta_3 < 90^\circ$) を求めよ。
- (3) 等式 $P_1H_2 + H_2H_3 + H_3O = R$ を用いて、 $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。
- (4) D の面積を S とするとき、 S^2 の値を求めよ。

2 関数 $f(x) = -\frac{5}{2}x(x-1)$ を考える。 a を実数とし、実数 b, c を $b = f(a), c = f(b)$ により定める。

- (1) 不等式 $a < b$ を満たすような a の値の範囲を求めよ。
- (2) 連立不等式

$$(*) \begin{cases} a < b \\ b > c \end{cases}$$

を満たすような a の値の範囲を求めよ。

- (3) (2) の連立不等式 $(*)$ が成り立つとき、 c と $f(c)$ の大小を判定せよ。

(以下余白)

- 3** a を正の定数とし、 m を自然数とする。 xy 平面上の 2 曲線 $C_1: y = ax^2$ ($x \geq 0$), $C_2: y = (\log x)^m$ ($x \geq 1$) および点 P は次の条件を満たしている。

C_1 と C_2 は P を通り、 P における C_1 の接線と P における C_2 の接線は一致する。

- (1) a の値および P の x 座標を m を用いて表せ。
- (2) 関数 $f(x) = \frac{(\log x)^m}{x^2}$ ($x \geq 1$) の最大値を求め、 $x \geq 1$ において不等式 $ax^2 \geq (\log x)^m$ が成り立つことを示せ。
- (3) 自然数 n に対して、不定積分 $\int (\log x)^n dx$ を I_n とおく。 $n \geq 2$ のとき、部分積分法により、 I_n を I_{n-1} を用いて表せ。
- (4) $m = 2$ のとき、 C_1, C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

- 4** xy 平面上の曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) を考える。 $0 < p < q$ のとき、 C 上の 2 点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(q, \frac{1}{q}\right)$ を通る直線と C で囲まれる図形の面積を S とし、その図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とする。

- (1) $r = \frac{q}{p}$ とおくとき、 S および V の値を p, r を用いて表せ。
- (2) 自然数 n に対して、 $p = 3^{n-1}, q = 3^n$ のときの V の値を V_n とおく。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ の和を求めよ。

(問題終り)

(以下余白)