

1

(1)

まず,  $\triangle ABP$  に余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 9 + 8 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 5 \end{aligned}$$

であるから,  $AB = \sqrt{5}$  である。従って,  $\triangle APB$  の面積を  $S$  とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PH \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot PH \end{aligned}$$

と書ける。一方,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot PH &= 3 \\ \Leftrightarrow PH &= \frac{6\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

(2)

$AP = AQ$ ,  $BP = BQ$  より  $\triangle APB \equiv \triangle AQB$  となるため,  $PH = QH$  である。よって, (1)の結果より,

$$QH = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

である。ここで,  $\triangle PHQ$  に余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{PH^2 + QH^2 - PQ^2}{2 \cdot PH \cdot QH} \\ &= \frac{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。従って,  $0 < \theta < \pi$  より  $\sin \theta > 0$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{4}{5}$

(3)

線分  $PH$ ,  $QH$  は直線  $AB$  と直交するため,

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{PH} &= 0 \\ \overline{AB} \cdot \overline{QH} &= 0 \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{PQ} &= \overline{AB} \cdot (\overline{HQ} - \overline{HP}) \\ &= -\overline{AB} \cdot \overline{QH} + \overline{AB} \cdot \overline{PH} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $\overline{AB} \neq \vec{0}$ ,  $\overline{PQ} \neq \vec{0}$  であるから, ベクトル  $\overline{AB}$  とベクトル  $\overline{PQ}$  は垂直である。

(証明終)

(4)

まず,  $\triangle PHQ$  の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot PH \cdot QH \cdot \sin \theta &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{72}{25} \end{aligned}$$

である。ここで, (3)の結果より辺  $AB$  と  $\triangle PHQ$  が直交することから, 四面体  $ABPQ$  を四面体  $AHPQ$  と四面体  $BHPQ$  に分割し,  $\triangle PHQ$  を底面,  $AH$  および  $BH$  を高さとして, それぞれの四面体の体積を考えると, 四面体  $ABPQ$  の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{72}{25} \cdot AH + \frac{1}{3} \cdot \frac{72}{25} \cdot BH &= \frac{24}{25} \cdot (AH + BH) \\ &= \frac{24}{25} \cdot AB \\ &= \frac{24\sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{24\sqrt{5}}{25}$

(1)

関数  $f(x)$  を  $f(x) = (2+x)e^{-x} - (2-x)$  とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - (2+x)e^{-x} + 1 \\ &= 1 - (1+x)e^{-x} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x} + (1+x)e^{-x} \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

である。 $x > 0$  のとき  $f''(x) > 0$  であるから, 関数  $f'(x)$  は単調増加である。また,

$$f'(0) = 1 - (1+0) \cdot 1 = 0$$

であるから,  $x > 0$  において

$$f'(x) > f'(0) = 0$$

が成り立つ。従って,  $x > 0$  において関数  $f(x)$  は単調増加であり,

$$f(0) = (2+0) \cdot 1 - (2-0) = 0$$

より

$$f(x) > f(0) = 0$$

が成り立つ。以上より,  $x > 0$  において  $2-x < (2+x)e^{-x}$  が成り立つ。

(証明終)

(2)

まず,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (2-x) dx &= \left[ 2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となる。また, 部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (2+x)e^{-x} dx &= \left[ -(2+x)e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= -\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 2 + \left[ -e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{7}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} (2-x) dx = \frac{7}{8}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} (2+x)e^{-x} dx = -\frac{7}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 3$$

(3)

まず, (1) で示した不等式が  $x = \frac{1}{2}$  においても成り立つことから,

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{2} &< \left( 2 + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} &< e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。また, (1) で示した不等式より,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2-x) dx < \int_0^{\frac{1}{2}} (2+x)e^{-x} dx$$

も成り立つため, ここに(2)の結果を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} &< -\frac{7}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 3 \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} &< \frac{17}{28} \end{aligned}$$

となる。以上より,  $\frac{3}{5} < e^{-\frac{1}{2}} < \frac{17}{28}$  が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

関数  $f(x)$  を微分し、三角関数の合成を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x}(1-\cos x) + e^{-\sqrt{3}x}\sin x \\ &= -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x} + e^{-\sqrt{3}x}(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \\ &= e^{-\sqrt{3}x}\left\{2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

となる。従って、 $2(n-1)\pi \leq x \leq 2n\pi$  における関数  $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |                |            |                                           |            |            |
|---------|----------------|------------|-------------------------------------------|------------|------------|
| $x$     | $2(n-1)\pi$    | ...        | $2(n-1)\pi + \frac{\pi}{3}$               | ...        | $2n\pi$    |
| $f'(x)$ | 0              | +          | 0                                         | -          | 0          |
| $f(x)$  | $f(2(n-1)\pi)$ | $\nearrow$ | $f\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ | $\searrow$ | $f(2n\pi)$ |

よって、 $A_n = f\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{3}\right)$  と書けるため、 $n=1$  のとき、

$$\begin{aligned} A_1 &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}$$

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} A_n &= f\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= e^{-\sqrt{3}\left\{2(n-1)\pi + \frac{\pi}{3}\right\}}\left\{1 - \cos\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right\} \\ &= e^{\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}(n-1)\right\}\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}(n-1)\right\}\pi} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}e^{\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}(n-1)\right\}\pi}$$

(3)

(2)の結果より、数列  $\{A_n\}$  は公比  $e^{-2\sqrt{3}\pi}$  の等比数列となる。ここで、 $0 < e^{-2\sqrt{3}\pi} < 1$  であるから、

無限等比級数は収束する。したがって、和を計算すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{3}(n-1)\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{3}\pi}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}}{2(1 - e^{-2\sqrt{3}\pi})} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}}{2(1 - e^{-2\sqrt{3}\pi})}$$

(1)

与えられた2次方程式(\*)の判別式を計算すると、

$$\begin{aligned} (-2a)^2 - 4 \cdot (2ab - b^2) &= 4a^2 - 8ab + 4b^2 \\ &= 4(a-b)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるため、2次方程式(\*)の解は実数のみである。

(証明終)

(2)

2次方程式(\*)の2つの解を求めると、

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + 2ab - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-b)\{x-(2a-b)\} &= 0 \\ \therefore x &= b, 2a-b \end{aligned}$$

となる。まず事象  $A$  が起こるさいころの目の組  $(a, b)$  について、 $b > 0$  より  $2a - b < 0$  であればよいことから、このような組  $(a, b)$  は、

$$(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)$$

の6通り存在する。さいころの目の出方はどれも同様に確からしく起こるから、事象  $A$  の確率  $P(A)$  は、

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

となる。次に、事象  $B$  が起こるさいころの目の組  $(a, b)$  について、2つの解の差の絶対値は

$$|(2a-b)-b| = 2|a-b| \text{ であるから、}$$

$$2|a-b| \leq 6 \Leftrightarrow |a-b| \leq 3$$

を満たす組  $(a, b)$  について考えればよい。

[1]  $|a-b|=0$  となるとき

このような組  $(a, b)$  は、 $a=b$  を満たす6通り存在する。

[2]  $|a-b|=1$  となるとき

このような組  $(a, b)$  は、

$$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$$

の10通り存在する。

[3]  $|a-b|=2$  となるとき

このような組  $(a, b)$  は、

$$(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)$$

の8通り存在する。

[4]  $|a-b|=3$  となるとき

このような組  $(a, b)$  は、

$$(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)$$

の6通り存在する。

以上[1][2][3][4]より、事象  $B$  が起こるさいころの目の組  $(a, b)$  は

$$6+10+8+6=30$$

通り存在する。したがって、事象  $B$  の確率は、

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{30}{36} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

である。また、事象  $A \cap B$  が起こるさいころの目の組  $(a, b)$  は、

$$(1, 3), (1, 4), (2, 5)$$

の3通りである。よって、

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

であるから、

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{5}{6}, P(A \cup B) = \frac{11}{12}$$