

平成 26 年度（前期日程）
入学者選抜学力検査問題

数 学 (120 分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計4枚）の受験番号記入欄（合計8箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で4問あり、2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 四面体 ABPQ は

$$AP = AQ = 3, \quad BP = BQ = 2\sqrt{2}, \quad PQ = \frac{12}{5}, \quad \angle APB = \frac{\pi}{4}$$

を満たすとする。点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする。

- (1) 線分 PH の長さを求めよ。
- (2) $\angle PHQ$ の大きさを θ とする。 $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (3) 2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直であることを証明せよ。
- (4) 四面体 ABPQ の体積を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $2 - x < (2 + x)e^{-x}$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x) dx$ および $\int_0^{\frac{1}{2}} (2 + x)e^{-x} dx$ の値を求めよ。
- (3) (1) と (2) を用いて、不等式 $\frac{3}{5} < e^{-\frac{1}{2}} < \frac{17}{28}$ が成り立つことを証明せよ。

(以下余白)

3 関数 $f(x) = e^{-\sqrt{3}x}(1 - \cos x)$ を考える。自然数 n に対し、区間 $2(n-1)\pi \leq x \leq 2n\pi$ における関数 $f(x)$ の最大値を A_n とする。

- (1) A_1 を求めよ。
- (2) 自然数 n に対し、 A_n を n を用いて表せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ の和を求めよ。

4 x の 2 次方程式

$$(*) \quad x^2 - 2ax + 2ab - b^2 = 0$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 a, b は実数とする。

- (1) $(*)$ は実数解のみをもつことを証明せよ。
- (2) 1 個のさいころを 2 回投げて出た目の数を順に a, b とする。この a, b に対して $(*)$ を考え、

「 $(*)$ は符号の異なる 2 つの解をもつ」という事象を A ,

「 $(*)$ の 2 つの解の差の絶対値は 6 以下である」という事象を B

とする。ただし、 $(*)$ が重解をもつときは $(*)$ の 2 つの解の差は 0 と考える。このとき、事象 A, B および和事象 $A \cup B$ の確率 $P(A), P(B)$ および $P(A \cup B)$ をそれぞれ求めよ。

(問題終了)

(以下余白)