

(1)

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\
&= (2, 4, -1) - (0, 0, 1) \\
&= (2, 4, -2) \\
&= 2 \cdot (1, 2, -1)
\end{aligned}$$

であるから、直線 AB 上を動く点 C について、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}
\overline{OC} &= \overline{OA} + t \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} \\
&= (0, 0, 1) + t(1, 2, -1) \\
&= (t, 2t, 1-t)
\end{aligned}$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned}
|\overline{OC}| &= |(t, 2t, 1-t)| \\
&= \sqrt{t^2 + (2t)^2 + (1-t)^2} \\
&= \sqrt{6t^2 - 2t + 1} \\
&= \sqrt{6\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

となるから、 $|\overline{OC}|$ は $t = \frac{1}{6}$ のときに最小値 $\sqrt{\frac{5}{6}}$ をとる。ゆえに

$$\begin{aligned}
|\overline{OC}_1| &= \sqrt{\frac{5}{6}} \\
&= \frac{\sqrt{30}}{6}
\end{aligned}$$

であり、さらに

$$\begin{aligned}
\overline{AC}_1 \cdot \overline{OC}_1 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \overline{AB} \right) \cdot \overline{OC}_1 \\
&= \frac{1}{6} (1, 2, -1) \cdot \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6} \right) \\
&= \frac{1}{36} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5) \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad |\overline{OC}_1| = \frac{\sqrt{30}}{6}, \quad \overline{AC}_1 \cdot \overline{OC}_1 = 0$$

(2)

点 C が点 A と異なる点である、すなわち $t \neq 0$ であるとき、

$$\begin{aligned}
\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{OC}|} &= \frac{|t(1, 2, -1)|}{\sqrt{6t^2 - 2t + 1}} \\
&= \frac{|t| \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6t^2 - 2t + 1}} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 5}}
\end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} - 1 &= 0 \\
\therefore t &= 1
\end{aligned}$$

のときに、 $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{OC}|}$ は最大値 $\sqrt{\frac{6}{5}}$ をとる。よって

$$\begin{aligned}
\frac{|\overline{AC}_2|}{|\overline{OC}_2|} &= \sqrt{\frac{6}{5}} \\
&= \frac{\sqrt{30}}{5}
\end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}
\overline{OA} \cdot \overline{OC}_2 &= (0, 0, 1) \cdot (1, 2, 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{|\overline{AC}_2|}{|\overline{OC}_2|} = \frac{\sqrt{30}}{5}, \quad \overline{OA} \cdot \overline{OC}_2 = 0$$

(3)

(1), (2) の過程より、点 C_1 、点 C_2 における t の値はともに正である。したがって、 $\overline{AC} = t \cdot \frac{1}{2} \overline{AB}$

であることを踏まえると、2 点 C_1, C_2 は直線 AB 上で点 A に対して同じ側にあることから、 $\angle C_1AO$ 、 $\angle OAC_2$ は共通な角であり、

$$\angle C_1AO = \angle OAC_2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。さらに(1), (2)の過程より、 $\overline{AC}_1 \cdot \overline{OC}_1, \overline{OA} \cdot \overline{OC}_2$ の値はともに 0 であるから、

$$\angle AC_1O = \angle AOC_2 = \frac{\pi}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。①、②より、 $\triangle AC_1O$ と $\triangle AOC_2$ は対応する 2 角がそれぞれ等しいから、互いに相似である。

(証明終)

(1)

$f(t) = 2e^{2t}$ より, ℓ_t の方程式は $y = 2e^{2t}(x-t) + e^{2t}$ である。同様に, ℓ_s の方程式は $y = 2e^{2s}(x-s) + e^{2s}$ である。いま, ℓ_s の傾きは ℓ_t の傾きの e 倍であるから,

$$\begin{aligned} 2e^{2s} &= e \cdot 2e^{2t} \\ \Leftrightarrow e^{2s} &= e^{2t+1} \end{aligned}$$

であり, e^x は x の単調増加関数であるから

$$\begin{aligned} 2s &= 2t+1 \\ \therefore s &= t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。よって, ℓ_s の方程式は t を用いて $y = 2e^{2t+1}\left(x-t-\frac{1}{2}\right) + e^{2t+1}$ と表されるから, ℓ_t と ℓ_s

の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2e^{2t}(x-t) + e^{2t} &= 2e^{2t+1}\left(x-t-\frac{1}{2}\right) + e^{2t+1} \\ \Leftrightarrow 2(x-t) + 1 &= 2e\left(x-t-\frac{1}{2}\right) + e \\ \Leftrightarrow 2(1-e)x &= 2t-1-2et \\ \therefore x &= \frac{2t-1-2et}{2(1-e)} = t + \frac{1}{2(e-1)} \end{aligned}$$

であり, y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 2e^{2t}\left(t + \frac{1}{2(e-1)} - t\right) + e^{2t} \\ &= \frac{e^{2t}}{e-1} + e^{2t} \\ &= \frac{e^{2t+1}}{e-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \left(t + \frac{1}{2(e-1)}, \frac{e^{2t+1}}{e-1} \right)$$

(2)

L は ℓ_s を y 軸に関して対称移動させた直線であるから, その方程式は

$$y = 2e^{2t+1}\left(-x-t-\frac{1}{2}\right) + e^{2t+1}$$

である。よって, L と直線 $x=t$ との交点 P_t の y 座標は

$$y = 2e^{2t+1}\left(-t-t-\frac{1}{2}\right) + e^{2t+1} = -4te^{2t+1}$$

である。

$$(\text{答}) -4te^{2t+1}$$

(3)

t が $0 \leq t \leq a$ の範囲を動くとき, (2) で定めた点 $P_t(t, -4te^{2t+1})$ が描く曲線 C の方程式は

$$C: y = -4xe^{2x+1} \quad (0 \leq x \leq a)$$

である。ここで, $0 \leq x \leq a$ のとき, $e^{2x+1} > 0$ であるから, C と x 軸の位置関係は以下の表のようになる。

x	0	...	a
C と x 軸の位置関係	交わる	C が下	C が下

したがって, C と x 軸および直線 $x=a$ とで囲まれた図形の面積は, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\{ 0 - (-4xe^{2x+1}) \right\} dx &= \int_0^a 4xe^{2x+1} dx \\ &= \left[2xe^{2x+1} \right]_0^a - \int_0^a 2e^{2x+1} dx \\ &= (2ae^{2a+1} - 0) - \left[e^{2x+1} \right]_0^a \\ &= 2ae^{2a+1} - (e^{2a+1} - e) \\ &= (2a-1)e^{2a+1} + e \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) (2a-1)e^{2a+1} + e$$

(1)

三角関数の和積公式を用いると

$$\begin{aligned}
 \sin 5x &= \sin x \\
 \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cos \left(\frac{5x+x}{2} \right) \sin \left(\frac{5x-x}{2} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cos 3x \sin 2x &= 0
 \end{aligned}$$

となるから、 $\cos 3x = 0$ または $\sin 2x = 0$ であるような x が求める解になる。ここで

$$\begin{aligned}
 0 < x < 2\pi \\
 \therefore 0 < 3x < 6\pi
 \end{aligned}$$

であることに注意すると、 $\cos 3x = 0$ の解は

$$\begin{aligned}
 3x &= \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi \\
 \therefore x &= \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。同様に $0 < 2x < 4\pi$ であることに注意すると、 $\sin 2x = 0$ の解は

$$\begin{aligned}
 2x &= \pi, 2\pi, 3\pi \\
 \therefore x &= \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

である。①、②より、求める x は $x = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

(2)

(1)の結果より、 $a = \frac{1}{6}\pi$ である。三角関数の積和公式、半角の公式を用いると、求める回転体の

の体積は

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \pi (\sin 5x - \sin x)^2 dx &= \pi \int_0^a (\sin^2 5x - 2 \sin 5x \sin x + \sin^2 x) dx \\
 &= \pi \int_0^a \left(\frac{1 - \cos 10x}{2} - 2 \cdot \frac{\cos 4x - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\
 &= \pi \left[x - \frac{1}{20} \sin 10x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{1}{6}\pi} \\
 &= \pi \left(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{20} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{40} \right)
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \pi \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{40} \right)$$

(1)

$$\begin{aligned}
 a_n + a_{n+1} - \frac{2n+1}{n(n+1)} &= 0 \\
 \Leftrightarrow a_n + a_{n+1} - \frac{(n+1)+n}{n(n+1)} &= 0 \\
 \Leftrightarrow a_n + a_{n+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= 0 \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{n+1} &= -\left(a_n - \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

より、数列 $\left\{a_n - \frac{1}{n}\right\}$ は初項が $a_1 - 1 = 0$ 、公比が -1 の等比数列である。よって

$$\begin{aligned}
 a_n - \frac{1}{n} &= 0 \\
 \therefore a_n &= \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{n}$$

(2)

(1)と同様に、

$$\begin{aligned}
 b_n + b_{n+1} - \frac{2n+1}{n(n+1)} &= 0 \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{n+1} &= -\left(b_n - \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

より、数列 $\left\{b_n - \frac{1}{n}\right\}$ は初項が $b_1 - 1 = 1$ 、公比が -1 の等比数列である。よって

$$\begin{aligned}
 b_n - \frac{1}{n} &= (-1)^{n-1} \\
 \therefore b_n &= \frac{1}{n} + (-1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{n} + (-1)^{n-1}$$