平成 27 年度（後期日程）
入学者選抜学力検査問題

数　　学　（120 分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. **解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ２箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計４枚）の受験番号記入欄（合計８箇所）に受験番号を記入しなさい。**
3. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。**
4. 問題は全部で４問あり，２ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は，計算などに使用してもよろしい。
6. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
7. 問題冊子と計算用紙は，持ち帰りなさい。

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ のそれぞれに対する配点率は同一である。

$\boxed{1}$ t, x, y, z, w を実数とする。座標平面上の 4 つのベクトル

$$\overrightarrow{p} = (2, 3t-1), \quad \overrightarrow{q} = (1, -t), \quad \overrightarrow{r} = (x, y), \quad \overrightarrow{s} = (z, w)$$

について，次の条件 (i), (ii) を考える。

(i) $\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ のなす角 α は不等式 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす。

(ii) 内積についての等式

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r} = 1, \quad \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{r} = 0, \quad \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{s} = 0, \quad \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{s} = 1$$

がすべて成り立つ。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) (i) が成り立つような t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) (i) と (ii) が成り立つとき，x, y, z, w を t の式で表せ。

(3) (i) と (ii) が成り立つとき，$\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{s}$ のなす角 β は不等式 $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ を満たすことを証明せよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$ の値を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，n 個の数 n^2+k^2 $(k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ の積

$$a_n = (n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdots\cdots(n^2+n^2)$$

を考える。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}$ を求めよ。

（以下余白）

3 関数 $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{2\cos x + 3}$ を考える。

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

4 5つの箱 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 があり，それぞれの箱に少なくとも1個の玉が入っているとき，次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$ 1から5までの番号をつけた5枚のカードを用意する。この中から1枚のカードを引いてそのカードの番号を m とし，残りの4枚のカードからもう1枚のカードを引いてそのカードの番号を n とするとき，箱 A_m から箱 A_n へ1個の玉を移す。

(1) 操作 $(*)$ を1回行ったあとで，A_1 の中の玉の個数が，1だけ減る確率を p，1だけ増える確率を q，変わらない確率を r とする。p, q, r の値を求めよ。

(2) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 のそれぞれに5個ずつ玉が入っているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(i) 操作 $(*)$ を5回行ったあとで，A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 のいずれかの箱の中の玉の個数が0になる確率を求めよ。

(ii) 操作 $(*)$ を3回行ったあとで，A_1 の中の玉の個数が5である確率を求めよ。

(iii) 操作 $(*)$ を5回行ったあとで，A_1 の中の玉の個数が5である確率を求めよ。

(問題終り)

(以下余白)