

(1)

直線 CD は平面 α に垂直であるから、直線 CD は直線 OC 、直線 BC の両方に垂直である。よって、 $\triangle OCD$ 、 $\triangle BCD$ は直角三角形である。以上から、三平方の定理を用いて、

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

となる。また、 $\angle AOC = \frac{\pi}{3}$ より $\angle OAB = \frac{2\pi}{3}$ であるから、 $\triangle OAB$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} OB^2 &= OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos \angle OAB \\ &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 19 \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\triangle OBD$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \cos \angle ODB &= \frac{OD^2 + BD^2 - OB^2}{2 \cdot OD \cdot BD} \\ &= \frac{10 + 5 - 19}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \angle ODB < \pi$ から $\sin \angle ODB > 0$ であり、 $\sin^2 \angle ODB + \cos^2 \angle ODB = 1$ より、

$$\begin{aligned} \sin \angle ODB &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ODB} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{23}}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle OBD$ の面積を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot OD \cdot BD \cdot \sin \angle ODB &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{23}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{46}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{46}}{2}$$

(2)

四面体 $OBCD$ の体積を考える。 $\triangle OBC$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot OC \cdot CB \cdot \sin \frac{2\pi}{3} &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、四面体 $OBCD$ の体積を計算すると、

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle OBC \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。ここで、 $\triangle OBD$ を四面体の底面と考えると、高さは線分 CH に相当するから、

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle OBD \cdot CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{46}}$$

$$\therefore CH = \frac{3\sqrt{138}}{46}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{138}}{46}$$

(1)

$f(x) = e^{ax} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$ であるとき、導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{ax} \left(1 - \frac{2}{x}\right) + e^{ax} \cdot \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{e^{ax}}{x^2} (ax^2 - 2ax + 2) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 0$ の範囲において $\frac{e^{ax}}{x^2} > 0$ であるから、 $ax^2 - 2ax + 2 = 0$ の正の実数解の個数について考えればよい。以下、 $a = 0$ のときと $a \neq 0$ のときで場合分けをする。

[1] $a = 0$ のとき

このとき、 $x > 0$ の範囲において

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$$

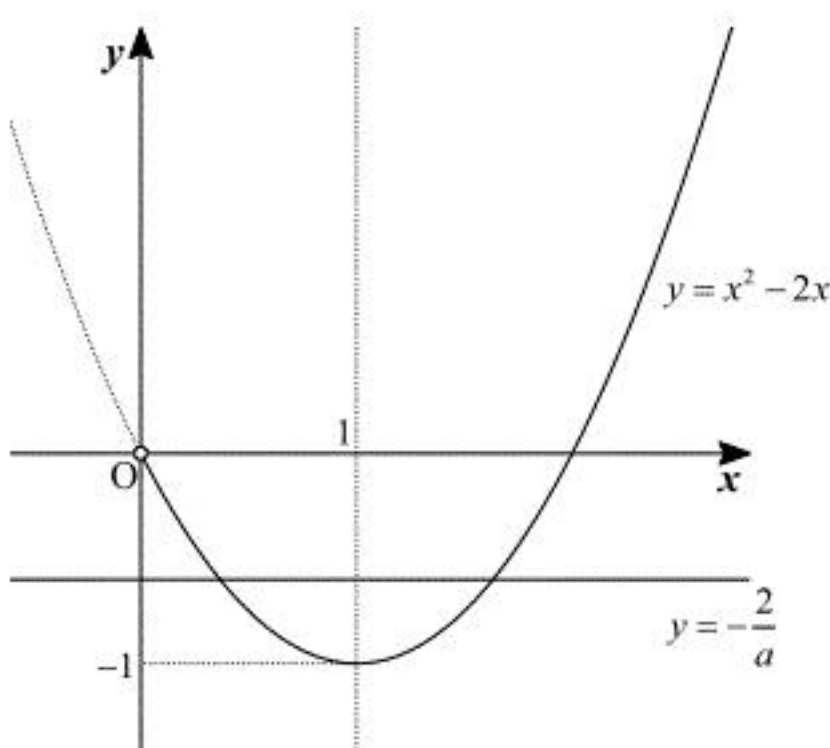
となるから、正の実数解は存在しない。

[2] $a \neq 0$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} ax^2 - 2ax + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &= -\frac{2}{a} \end{aligned}$$

と変形できるから、方程式 $ax^2 - 2ax + 2 = 0$ の解は放物線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = -\frac{2}{a}$ の共有点の x 座標となる。



曲線 $y = x^2 - 2x$ のグラフは上図のようになるから、解が 0 個となるのは

$$\begin{aligned} -\frac{2}{a} &< -1 \\ \therefore 0 &< a < 2 \end{aligned}$$

を満たすときである。

以上[1], [2]より、 $k = 0$ となる a の範囲は $0 \leq a < 2$ である。

(答) $0 \leq a < 2$

(2)

(1)の場合分け[2]より、 $k = 1$ となるのは

$$\begin{aligned} -\frac{2}{a} &> 0 \text{ または } -\frac{2}{a} = -1 \\ \therefore a &< 0 \text{ または } a = 2 \end{aligned}$$

となる場合である。以下、場合分けを利用して考える。

[1] $a < 0$ のとき

$$f'(x) = \frac{e^{ax}}{x^2} (ax^2 - 2ax + 2) = \frac{ae^{ax}}{x^2} \left(x^2 - 2x + \frac{2}{a}\right)$$

と変形できる。ここで、 $\frac{ae^{ax}}{x^2} < 0$ であり、 $x = t$ の前後において $x^2 - 2x + \frac{2}{a}$ は負から正に変化するから、 $f'(x)$ は正から負に変化する。以上より、 $f(x)$ は $x = t$ で極大値をとる。

[2] $a = 2$ のとき

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{x^2} (2x^2 - 4x + 2) = \frac{2e^{ax}}{x^2} (x - 1)^2$$

と変形でき、 $t = 1$ である。 $x = 1$ の前後で $f'(x)$ の正負は変化しないから、 $f(x)$ は $x = t$ で極値をとらない。

以上[1], [2]より、 $a < 0$ のときは $x = t$ で極値をとり、 $a = 2$ のときは $x = t$ で極値をとらない。

(答) $k = 1$ となるような a の範囲： $a < 0$ または $a = 2$ $a < 0$ のとき： $f(x)$ は $x = t$ で極値をとる $a = 2$ のとき： $f(x)$ は $x = t$ で極値をとらない

(3)

(1)の場合分け[2]より、 $k = 2$ となるのは

$$\begin{aligned} -1 &< -\frac{2}{a} < 0 \\ \therefore a &> 2 \end{aligned}$$

の場合と分かる。ここで、 $f'(x) = 0$ の解を $x = t_1, t_2$ ($t_1 < t_2$) とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{ae^{ax}}{x^2} \left(x^2 - 2x + \frac{2}{a}\right) \\ &= \frac{ae^{ax}}{x^2} (x - t_1)(x - t_2) \end{aligned}$$

と変形できる。 $\frac{ae^{ax}}{x^2} > 0$ であることに注意すると、 $x = t_1$ の前後で $f'(x)$ は正から負に変化するから、 $f(x)$ は $x = t_1$ で極大値をとる。一方、 $x = t_2$ の前後で $f'(x)$ は負から正に変化するから、 $f(x)$ は $x = t_2$ で極小値をとる。以上より、 $x = t_1, t_2$ において、 $f(x)$ はともに極値をとる。

(答) $k = 2$ となるような a の範囲： $a > 2$ $x = t_1, t_2$ において、 $f(x)$ はともに極値をとる

(1)

 $0 < x < \pi$ において,

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{x(1 + \cos x)}{\sin x}$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \sin x}{x}$$

と変形できる。ここで、 $f(x)$, $g(x)$ はともに $x=0$ で連続であるから,

$$a = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x(1 + \cos x)}{\sin x} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x} = 0$$

と定義すればよい。

(答) $a=2, b=0$

(2)

 $0 < x \leq \pi$ において,

$$f(x)g(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{\sqrt{x} \sin x}{x} = \frac{\sqrt{x}(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \sqrt{x}(1 + \cos x)$$

と変形でき、上式は $x=0$ の場合にも成立する。したがって、求める体積を立式すると,

$$\pi \int_0^\pi \left\{ \sqrt{x}(1 + \cos x) \right\}^2 dx = \pi \int_0^\pi x(\cos^2 x + 2\cos x + 1) dx$$

となる。ここで、積分定数を C とすると,

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos^2 x dx &= \int \frac{x + x \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} - \int \frac{\sin 2x}{4} dx \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C \end{aligned}$$

となるから、領域 D を回転させてできる立体の体積は,

$$\begin{aligned} \pi \int_0^\pi x(\cos^2 x + 2\cos x + 1) dx &= \pi \left[\frac{x^2}{2} + 2(x \sin x + \cos x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} \right]_0^\pi \\ &= \frac{3}{4} \pi^3 - 4\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{4} \pi^3 - 4\pi$

(1)

p_0, p_1, p_2 はそれぞれ白球を2個取り出す確率, 赤球と白球を1個ずつ取り出す確率, 赤球を2個取り出す確率である。よって,

$$p_0 = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

$$p_1 = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

$$p_2 = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

となる。

$$(答) \quad p_0 = \frac{1}{10}, p_1 = \frac{3}{5}, p_2 = \frac{3}{10}$$

(2)

1回目に取り出す球の種類による場合分けを考える。

[1] 1回目に白球を2個取り出す場合

このとき, 袋に残っているのは赤球3個と白球1個である。この条件のもとで, 赤球と白球を1個ずつ取り出す確率は

$$\frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}$$

であり, このとき $(r, w) = (2, 0)$ となる。一方, 赤球を2個取り出す確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}$$

であり, このとき $(r, w) = (2, 1)$ となる。

[2] 1回目に白球を1個, 赤球を1個取り出す場合

このとき, 袋に残っているのは赤球2個と白球1個である。この条件のもとで, 赤球と白球を1個ずつ取り出す確率は

$$\frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_3C_2} = \frac{2}{3}$$

であり, このとき $(r, w) = (1, 0)$ となる。一方, 赤球を2個取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} = \frac{1}{3}$$

であり, このとき $(r, w) = (1, 1)$ となる。

[3] 1回目に赤球を2個取り出す場合

このとき, 袋に残っているのは赤球2個と白球2個である。この条件のもとで, 白球を2個取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

であり, このとき $(r, w) = (2, 1)$ となる。また, 赤球と白球を1個ずつ取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

であり, このとき $(r, w) = (1, 1)$ となる。さらに, 赤球を2個取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

であり, このとき $(r, w) = (1, 2)$ となる。

以上[1], [2], [3]より, $r = w$ となるのは $(r, w) = (1, 1)$ のときのみであると分かる。よって, 求める確率は,

$$p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot \frac{1}{3} + p_2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{2}{5}$$

(3)

(2)における考察より, $r > w$ となるのは $(r, w) = (2, 0), (2, 1), (1, 0)$ の各場合と分かる。よって, 求める確率は

$$p_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + p_1 \cdot \frac{2}{3} + p_2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{20}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{11}{20}$$

(4)

(2)における考察より, $r > w$ かつ $r + w = 2$ となるのは $(r, w) = (2, 0)$ の場合のみであり, この場合の確率は

$$p_0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

である。(3)の結果より, $r > w$ となる確率は $\frac{11}{20}$ であるから, 求める条件付き確率は

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{20}{11} = \frac{1}{11}$$

である。

$$(答) \quad \frac{1}{11}$$