

(1)

$x \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin \theta > 0$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \theta)'}{\sin \theta} d\theta \\ &= \left[\log(\sin \theta) \right]_x^{\frac{\pi}{2}} \quad (\because \sin \theta > 0) \\ &= -\log(\sin x) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \{-\log(\sin x)\} = \infty$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$$

(2)

$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$ であるから,

$$\begin{aligned} \ell(t) &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx \\ &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} dx \\ &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \quad (\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ より, } t \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ において } \sin x > 0) \\ &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{(1 - \cos x)'}{1 - \cos x} - \frac{(1 + \cos x)'}{1 + \cos x} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(1 - \cos x) - \log(1 + \cos x) \right]_t^{\frac{\pi}{2}} \quad (\because t \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ において } 0 \leq \cos x < 1) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \ell(t) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}$$

(3)

これまでの結果より

$$\begin{aligned} \ell(t) - f(t) &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} + \log(\sin t) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} + \frac{1}{2} \log(\sin^2 t) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \cdot \sin^2 t \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \cdot (1 - \cos^2 t) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \log (1 + \cos t)^2 \\ &= \log(1 + \cos t) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \{\ell(t) - f(t)\} &= \lim_{t \rightarrow +0} \log(1 + \cos t) \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \{\ell(t) - f(t)\} = \log 2$$

(1)

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \tan x - x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} (\sin x \cos x - x)$$

が成り立つ。問題文より、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $0 < \sin x < x$ であり、また、 $\cos x < 1$ であるから、

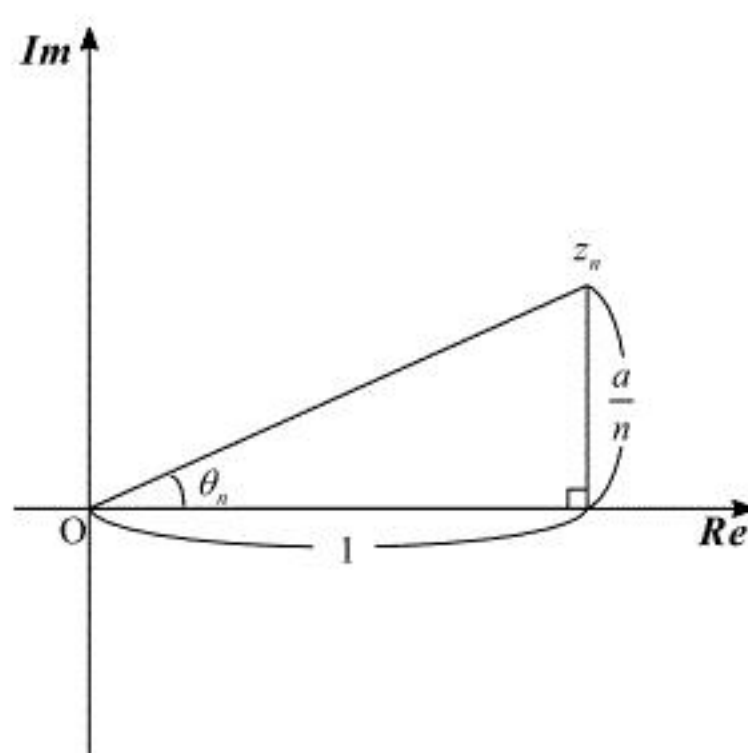
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sin^2 x} (\sin x \cos x - x) \\ &< \frac{1}{\sin^2 x} (\sin x - x) \\ &< 0 \end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ の増減は以下の通りになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	
$f(x)$			

(答) 前表

(2)



z_n を図示すると上図のようになる。図より、 $\tan \theta_n = \frac{a}{n}$ が成り立つ。よって、 $\tan \theta_{n+1} < \tan \theta_n$ と

なる。関数 $y = \tan x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において単調増加であるから $0 < \theta_{n+1} < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ が成り立つ。こ

れと(1)の結果より、

$$\begin{aligned} f(\theta_n) &< f(\theta_{n+1}) \\ \Leftrightarrow \frac{\theta_n}{\tan \theta_n} &< \frac{\theta_{n+1}}{\tan \theta_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{n}{a} \theta_n &< \frac{n+1}{a} \theta_{n+1} \\ \Leftrightarrow n \theta_n &< (n+1) \theta_{n+1} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(3)

(2)の過程より $n\theta_n = a \frac{\theta_n}{\tan \theta_n}$ である。また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0 \left(\because 0 < \theta_n < \frac{\pi}{2} \right)$$

が成り立つ。さらに、 $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ であることと、問題文で与えられている不等式より、

$$\begin{aligned} \sin \theta_n &< \theta_n < \tan \theta_n \\ \Leftrightarrow \cos \theta_n &< \frac{\theta_n}{\tan \theta_n} < 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n = 1$ である。よってはさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{\tan \theta_n} = 1$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{\theta_n}{\tan \theta_n} \\ &= a \end{aligned}$$

を得る。

また、 $r_n = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2}$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a^2}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{2n}} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n = 1$$

(1)

$p_1 < p_2$ かつ $q_1 < q_2$ であるとき,

$$\begin{aligned} p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_1 q_2 - p_2 q_1 &= p_2 (q_2 - q_1) - p_1 (q_2 - q_1) \\ &= (p_2 - p_1)(q_2 - q_1) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから, $p_1 q_2 + p_2 q_1 < p_1 q_1 + p_2 q_2$ を得る。

(証明終)

(2)

背理法を利用して, $b_i > b_j$ を満たす2つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) が存在することを示す。
すなわち,

2つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) に対して常に $b_i \leq b_j$ である $\cdots \textcircled{1}$

と仮定して矛盾を導く。いま, $b_1, b_2, \dots, b_n$ は $a_1, a_2, \dots, a_n$ の順列であり, $a_1, a_2, \dots, a_n$ は相異なるから, $b_1, b_2, \dots, b_n$ も相異なる。よって, $\textcircled{1}$ より, 2つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) に対して常に $b_i < b_j$ であるといえる。すると, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ となるから, $b_1, b_2, \dots, b_n$ は $a_1, a_2, \dots, a_n$ を小さい順に並べたものとなる。しかし, これは $b_1, b_2, \dots, b_n$ が順列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ とは異なるという条件に矛盾する。よって, $b_i > b_j$ を満たす2つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) が存在することが示された。

(証明終)

(3)

(2)より, $b_i > b_j$ を満たす2つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) が存在する。そこで, $c_1, c_2, \dots, c_n$ を

$$c_k = b_k \quad (k \neq i, j)$$

$$c_i = b_j$$

$$c_j = b_i$$

を満たすようにとる。すると,

$$\sum_{k=1}^n a_k c_k - \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_i b_j + a_j b_i - a_i b_i - a_j b_j$$

となる。 $a_i < a_j, b_j < b_i$ であることと(1)より, 右辺について

$$a_i b_j + a_j b_i - a_i b_i - a_j b_j > 0$$

が成り立つ。したがって, 上のような $c_1, c_2, \dots, c_n$ に対して,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k < \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

が成り立つ。

(証明終)