

平成 29 年度（前期日程）
入学者選抜学力検査問題

数 学 (120 分)

(注意事項)

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計4枚）の受験番号記入欄（合計8箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で4問あり、2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがある場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とする。 xy 平面において、原点 $O(0,0)$, 点 $A(p, q)$ ($q > 0$) および点 $B(1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を考える。線分 AO を $s:(1-s)$ の比に内分する点を C とし、線分 AB を $t:(1-t)$ の比に内分する点を D とする。点 A から直線 CD に下ろした垂線を AH とし、線分 AH の長さを h とおく。また、線分 CD の長さを ℓ とおく。

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。ベクトル $\overrightarrow{CD}$ を s, t および $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。
- (2) h を s, t, q および ℓ を用いて表せ。また、 ℓ を s, t, p, q を用いて表せ。
- (3) s, t および q を固定する。 p が実数全体を動くときの h の最大値を求めよ。

2 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定める。 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 t に対し、 xy 平面における曲線 $y = f(x)$ ($t \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の長さを $\ell(t)$ とおく。

- (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を求めよ。
- (2) $\ell(t)$ を求めよ。
- (3) 極限 $\lim_{t \rightarrow +0} (\ell(t) - f(t))$ を求めよ。

(以下余白)

[前期]

- 3** a を正の実数とし、 n を自然数とする。 i を虚数単位とし、複素数 $z_n = 1 + \frac{a}{n}i$ を考え、 $r_n = |z_n|$, $\theta_n = \arg z_n$ ($0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$) とおく。このとき次の問いに答えよ。ただし、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき不等式

$$\sin x < x < \tan x$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ の $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲における増減を調べよ。
- (2) 不等式 $n\theta_n < (n+1)\theta_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n$ を求めよ。

- 4** n を 2 以上の自然数とする。 n 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が条件 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ を満たすとする。 $b_1, b_2, \dots, b_n$ は n 個の数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ をすべて並べた順列であり、順列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ とは異なるとする。

- (1) 実数 p_1, p_2, q_1, q_2 が $p_1 < p_2$ および $q_1 < q_2$ を満たすとき、不等式

$$p_1q_2 + p_2q_1 < p_1q_1 + p_2q_2$$

が成り立つことを示せ。

- (2) $b_i > b_j$ を満たす 2 つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) が存在することを示せ。
- (3) n 個の数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ をすべて並べた順列 $c_1, c_2, \dots, c_n$ で、不等式

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k < \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

を満たすものが存在することを示せ。

(問題終了)

(以下余白)

[前期]