$\boxed{1}$

(1)

C_1とC_2の方程式を連立すると,

$$\begin{cases} y = \log x \\ y = \dfrac{1}{2}(\log x)^2 - 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \log x \\ y^2 - 2y - 8 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^y \\ (y-4)(y+2) = 0 \end{cases}$$
$$\therefore (x,\ y) = \left(e^{-2},\ -2\right),\ \left(e^4,\ 4\right)$$

となる。

(答) $\left(e^{-2},\ -2\right),\ \left(e^4,\ 4\right)$

(2)

$f(x) = \dfrac{1}{2}(\log x)^2 - 4$とおく。導関数$f'(x)$は,

$$f'(x) = \frac{\log x}{x}$$

である。これより,C_2上の点$(t,\ f(t))$における接線の方程式は,

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$
$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{2}(\log t)^2 + 4 = \frac{\log t}{t}(x - t)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{\log t}{t}x + \frac{1}{2}(\log t)^2 - \log t - 4$$

である。これが原点を通るとき,

$$0 = \frac{1}{2}(\log t)^2 - \log t - 4$$
$$\Leftrightarrow (\log t)^2 - 2\log t - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\log t - 4)(\log t + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \log t = -2,\ 4$$
$$\Leftrightarrow t = e^{-2},\ e^4$$

である。以上より,C_2の接線で原点を通るものは,

$$y = \frac{-2}{e^{-2}}x + \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 - (-2) - 4$$
$$= -2e^2 x$$
$$y = \frac{4}{e^4}x + \frac{1}{2}\cdot 4^2 - 4 - 4$$
$$= 4e^{-4}x$$

の2本である。

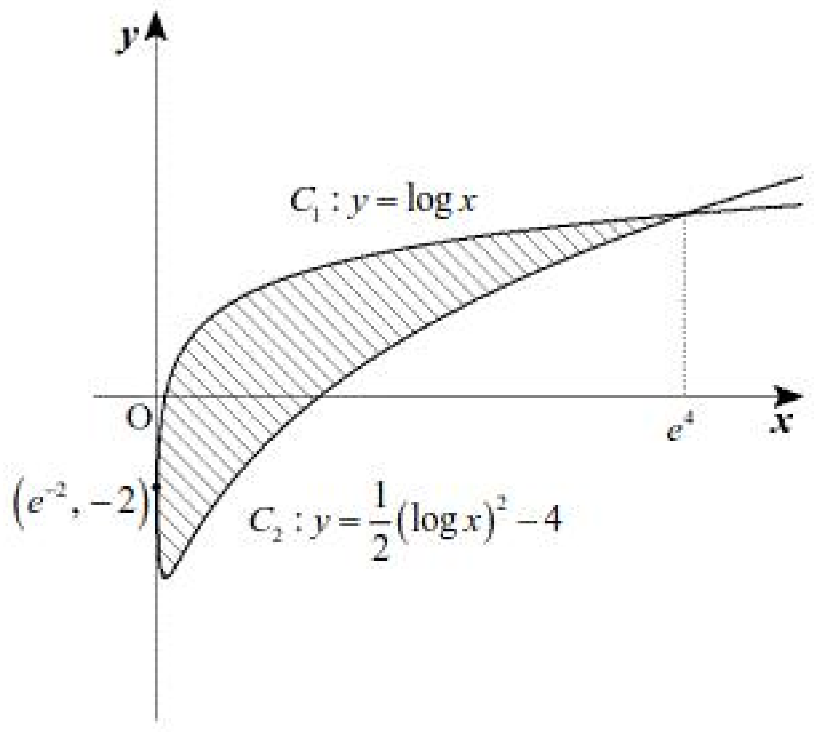
(答) $y = -2e^2 x$
$y = 4e^{-4}x$

(3)

$y = \log x,\ y = \dfrac{1}{2}(\log x)^2 - 4$はいずれも$x > 0$で連続である。ここで,$\log x$と$\dfrac{1}{2}(\log x)^2 - 4$の大小関係について,

$$\frac{1}{2}(\log x)^2 - 4 < \log x$$
$$\Leftrightarrow (\log x)^2 - 2\log x - 8 < 0$$
$$\Leftrightarrow (\log x - 4)(\log x + 2) < 0$$
$$\Leftrightarrow -2 < \log x < 4$$
$$\Leftrightarrow e^{-2} < x < e^4$$

であるから,$e^{-2} < x < e^4$において,$\dfrac{1}{2}(\log x)^2 - 4 < \log x$である。したがって,2曲線$C_1,\ C_2$で囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



ここで,

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int dx$$
$$= x\log x - x + C$$
$$\int (\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - \int 2\log x\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$$

である(Cは積分定数)。以上より,求める面積は,

$$\int_{e^{-2}}^{e^4}\left[(\log x) - \left\{\frac{1}{2}(\log x)^2 - 4\right\}\right]dx = \int_{e^{-2}}^{e^4}\left\{-\frac{1}{2}(\log x)^2 + \log x + 4\right\}dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}\left\{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\right\} + x\log x - x + 4x\right]_{e^{-2}}^{e^4}$$
$$= \left[x\left\{-\frac{1}{2}(\log x)^2 + 2\log x + 2\right\}\right]_{e^{-2}}^{e^4}$$
$$= 2e^4 + 4e^{-2}$$

である。

(答) $2e^4 + 4e^{-2}$

$\boxed{2}$

(1)

$$w-z=z\{(\cos\theta-1)+i\sin\theta\}$$

であるから,

$$\begin{aligned}|w-z|&=|z\{(\cos\theta-1)+i\sin\theta\}|\\&=|z||(\cos\theta-1)+i\sin\theta|\\&=r\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}\\&=r\sqrt{2-2\cos\theta}\\&=r\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\because\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}\right)\\&=2r\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

である。

(答) $2r\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

(2)(i)

$$\begin{aligned}\frac{z_3}{z_2}&=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\theta+i\sin\theta}\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}\\&=\cos(\alpha-\theta)+i\sin(\alpha-\theta)\end{aligned}$$

であるから, $\frac{z_3}{z_2}$ の実部は $\cos(\alpha-\theta)$ であり, 虚部は $\sin(\alpha-\theta)$ である。

(答) 実部 $\cos(\alpha-\theta)$
虚部 $\sin(\alpha-\theta)$

(ii)

$$|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|=|z_3-z_1||z_3-z_2|$$

である。(1)より,

$$\begin{aligned}|z_3-z_1|&=2|z_1|\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\\&=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\end{aligned}$$

である。また, (2)(i)より,

$$z_3=z_2\{\cos(\alpha-\theta)+i\sin(\alpha-\theta)\}$$

であるから, (1)の結果より,

$$\begin{aligned}|z_3-z_2|&=2|z_2|\left|\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right|\\&=2\left|\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

である。以上より,

$$\begin{aligned}|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|&=|z_3-z_1||z_3-z_2|\\&=4\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\left|\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

である。

(答) $4\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\left|\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right|$

(iii)

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のもと $\sin\theta,\ \sin\frac{\theta}{2}\geqq0$ であることに注意すると, $\alpha=2\theta$ のとき,

$$\begin{aligned}|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|&=4|\sin\theta|\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\\&=4\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\\&=8\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=8\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\\&=8\left(-\cos^3\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

である。ここで, $f(t)=8(-t^3+t)$ とおくと, $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $0\leqq\cos\frac{\theta}{2}\leqq1$ であるから, $0\leqq\theta\leqq\pi$ における $|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|$ の最大値は, $0\leqq t\leqq1$ における $f(t)$ の最大値に一致する。

$$f'(t)=8(-3t^2+1)=-24\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

であるから, $f(t)$ の増減は下表の通りとなる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	

すなわち, $0\leqq t\leqq1$ における $f(t)$ の最大値は $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ である。以上より, $0\leqq\theta\leqq\pi$ における $|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|$ の最大値は $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ である。

(答) $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{3}$

C_1, C_2はいずれも$(0,0)$を通るから，$(0,0)$はC_1とC_2の共有点の1つである。以下では，C_1とC_2の共有点のうち，x座標が0ではないものの個数を求める。$x \neq 0$のもと，

$$\begin{cases} y = ax \\ y = \left(2x - x^2\right)e^x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = ax \\ (2-x)e^x = a \end{cases}$$

となる。ここで，$f(x) = (2-x)e^x$とおくと，

$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x$$
$$= (1-x)e^x$$

であるから，$f'(x) = 0$のとき，$x = 1$である。また，

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

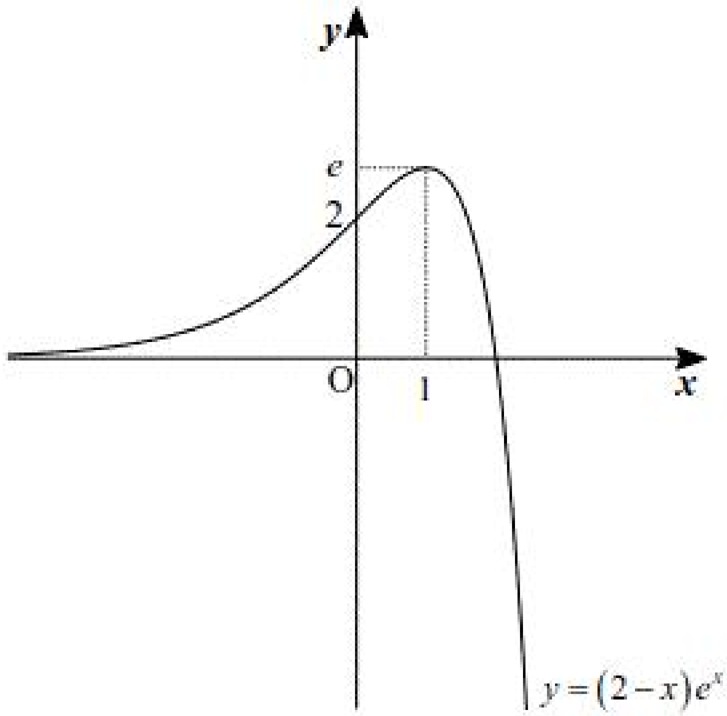
であり，$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$であることから，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

である。以上より，$f(x)$の増減は下表の通りとなる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	2	$\nearrow$	e	$\searrow$	$(-\infty)$

以上より，$y = f(x)$のグラフは以下のようになる。



C_1とC_2の共有点のうち，x座標が0ではないものの個数は，直線$y = a$と曲線$y = f(x)$の$x \neq 0$での共有点の個数に等しい。図より，$a \leqq 0$のときは1個，$0 < a < 2$のときは2個，$a = 2$のときは1個，$2 < a < e$のときは2個，$a = e$のときは1個，$e < a$のときは0個存在する。以上より，

$$N(a) = \begin{cases} 1 \ (e < a \text{のとき}) \\ 2 \ (a \leqq 0,\ a = 2,\ a = e \text{のとき}) \\ 3 \ (0 < a < 2,\ 2 < a < e \text{のとき}) \end{cases}$$

である。

(答) $N(a) = \begin{cases} 1 \ (e < a \text{のとき}) \\ 2 \ (a \leqq 0,\ a = 2,\ a = e \text{のとき}) \\ 3 \ (0 < a < 2,\ 2 < a < e \text{のとき}) \end{cases}$

$\boxed{4}$

全ての自然数 n は，0 以上の整数 l を用いて，$6l, 6l+1, 6l+2, 6l+3, 6l+4, 6l+5$ のいずれかのように表せる。以下，n を 6 で割った余りで場合分けする。また，以下では「整数 a_n が 2 でも 3 でも割り切れない」ことを，「n が条件 P を満たす」と書く。

[1] $n=6l, 6l+2, 6l+4$ と表せるとき

このとき，n は偶数であるから，$3n+2$ も偶数である。よって，$a_n=(2n+1)(3n+2)$ も偶数であり，n は条件 P を満たさない。

[2] $n=6l+1$ と表せるとき

$$\begin{aligned} a_n &= (12l+3)(18l+5) \\ &= 3(4l+1)(18l+5) \end{aligned}$$

であるから，nは条件 P を満たさない。

[3] $n=6l+3$ と表せるとき

$$a_n=(12l+7)(18l+11)$$

である。ここで，$12l+7, 18l+11$ は，いずれも 2 でも 3 でも割り切れないから，$(12l+7)(18l+11)$ は2 でも3でも割り切れない。よって，n は条件 P を満たす。

[4] $n=6l+5$ と表せるとき

$$a_n=(12l+11)(18l+17)$$

である。ここで，$12l+11, 18l+17$ は，いずれも 2 でも 3 でも割り切れないから，$(12l+11)(18l+17)$ は2 でも3でも割り切れない。よって，n は条件 P を満たす。

以上[1], [2], [3], [4]より，数列 $\{b_n\}$ は，0 以上の整数 l を用いて $6l+3$ または $6l+5$ と表される自然数を並べたものであると分かる。k が奇数であるとき，b_k は，$6l+3$ で表される自然数のうち，$\frac{k+1}{2}$ 番目に小さいもの，すなわち

$$\begin{aligned} b_k &= 6\left(\frac{k+1}{2}-1\right)+3 \\ &= 3k \end{aligned}$$

である。一方，k が偶数であるとき，b_k は，$6l+5$ で表される自然数のうち，$\frac{k}{2}$ 番目に小さいもの，すなわち

$$\begin{aligned} b_k &= 6\left(\frac{k}{2}-1\right)+5 \\ &= 3k-1 \end{aligned}$$

である。以上より，

$$b_k=\begin{cases} 3k & (k\text{ が奇数のとき}) \\ 3k-1 & (k\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。

(答) $b_k=\begin{cases} 3k & (k\text{ が奇数のとき}) \\ 3k-1 & (k\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$