

1

(1)

$C: y = x^3 e^{-2x^2}$ について、
 $y' = 3x^2 e^{-2x^2} - 4x^4 e^{-2x^2}$

であるから、曲線 C 上の点 $(p, p^3 e^{-2p^2})$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3p^2 - 4p^4) e^{-2p^2} (x - p) + p^3 e^{-2p^2} \\ &= (3p^2 - 4p^4) e^{-2p^2} x + (-2p^3 + 4p^5) e^{-2p^2} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = (3p^2 - 4p^4) e^{-2p^2} x + (-2p^3 + 4p^5) e^{-2p^2}$

(2)

直線 L と曲線 C が点 $(p, p^3 e^{-2p^2})$ で接するとき、 $\textcircled{1}$ の式で表される直線と直線 L は一致する。

$\textcircled{1}$ の式で表される直線と直線 L の y 切片を比較すると、

$$0 = (-2p^3 + 4p^5) e^{-2p^2}$$

となる。これを解くと、

$$\begin{aligned} 0 &= (-2p^3 + 4p^5) e^{-2p^2} \\ \Leftrightarrow p^3 (\sqrt{2}p - 1) (\sqrt{2}p + 1) e^{-2p^2} &= 0 \\ \therefore p &= 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\because e^{-2p^2} > 0 \right) \end{aligned}$$

である。

[1] $p = 0$ のとき

$\textcircled{1}$ の式で表される直線と直線 L の傾きを比較すると、

$$\begin{aligned} a &= (3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^4) e^{-2 \cdot 0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、直線 L の式は、

$$y = 0$$

となる。しかしこのとき直線 L と曲線 C の共有点は $(0, 0)$ のみであるので接点は 1 つ以下であり、条件を満たさない。

[2] $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$\textcircled{1}$ の式で表される直線と直線 L の傾きを比較すると、

$$\begin{aligned} a &= \left\{ 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \right\} e^{-2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

であるから、直線 L の式は、

$$y = \frac{1}{2e} x$$

となる。このとき直線 L と曲線 C は点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}e} \right)$ で接する。また $y = \frac{1}{2e} x$ と $y = x^3 e^{-2x^2}$

は奇関数であるから、点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}e} \right)$ でも直線 L と曲線 C は接する。よって、このとき直線 L は条件を満たす。

[3] $p = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

直線 L と曲線 C の対称性から、この場合は[2]と同様に $a = \frac{1}{2e}$ であり直線 L と曲線 C は

点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}e} \right)$ と点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}e} \right)$ において接するため、条件を満たす。

以上[1], [2], [3]より、求める値は、

$$a = \frac{1}{2e}$$

である。

(答) $a = \frac{1}{2e}$

(3)

$f(x) = \frac{1}{2e} x - x^3 e^{-2x^2}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2e} - (3x^2 e^{-2x^2} - 4x^4 e^{-2x^2}) \\ f''(x) &= -6x e^{-2x^2} + 28x^3 e^{-2x^2} - 16x^5 e^{-2x^2} \\ &= -2x (3 - 14x^2 + 8x^4) e^{-2x^2} \\ &= -2x (3 - 2x^2) (1 - 4x^2) e^{-2x^2} \end{aligned}$$

であり、 $x > 0$ において $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}$ である。また、

$$f'(0) = \frac{1}{2e} > 0, f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{e}}{2e} < 0, f'\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{9 + e^2}{2e^3} > 0 \text{ であり、} 0 < x < \frac{1}{2} \text{ において } f''(x) < 0,$$

$\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ において $f''(x) > 0$ である。よって、 $0 < x < \frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ のそれぞれの区間において $f'(x) = 0$ を満たす実数 x がただ 1 つ存在する。そのような x を

$\alpha, \beta \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta < \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$ とすると、 $x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	α	...	$\frac{1}{2}$	...	β	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...	$(+\infty)$
$f'(x)$	$\frac{1}{2e}$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$(+\infty)$

よって、 $f(x)$ の $x \geq 0$ における最小値は $f(0)$ または $f(\beta)$ である。ここで、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2e} - \left\{ 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 e^{-2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} - 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 e^{-2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

と $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{6}}{2}$ から $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であることが分かる。よって(2)と増減表から、

$$\begin{aligned} f(\beta) &= 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

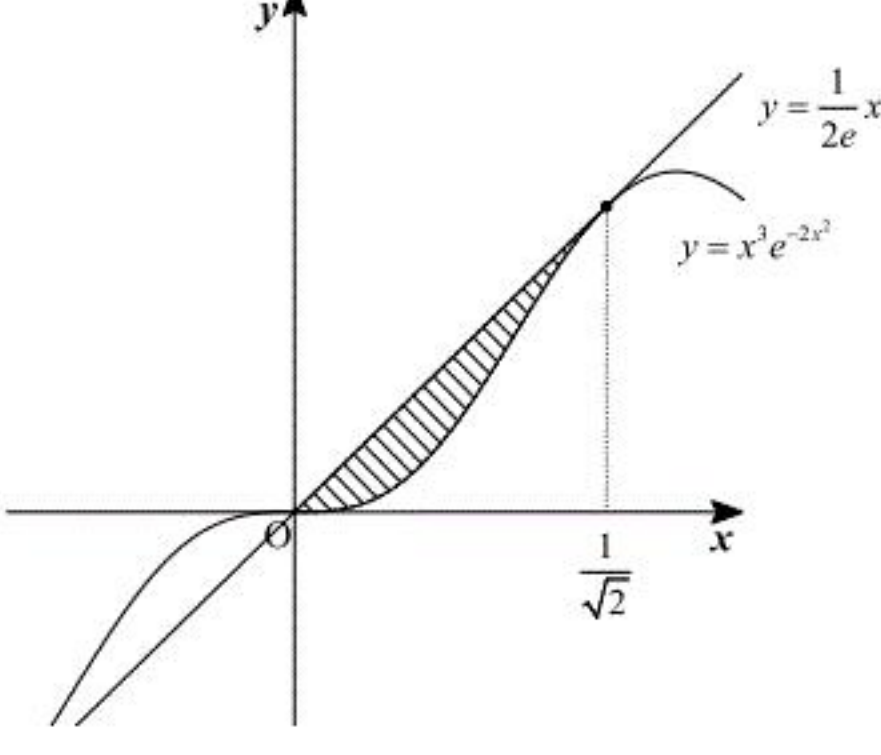
であるから、増減表より $x \geq 0$ において $f(x) \geq 0$ すなわち $ax \geq x^3 e^{-2x^2}$ が示された。また、等

号成立は $x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

証明: 前述

(答) 等号が成立する x の値: $x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$

(4)



求める面積は図の斜線部の面積に等しい。これを S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2e} x - x^3 e^{-2x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4e} x^2 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[\frac{x^2}{4} e^{-2x^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{2} e^{-2x^2} dx \\ &= \frac{1}{8e} + \frac{1}{8e} + \left[\frac{1}{8} e^{-2x^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{3-e}{8e} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{3-e}{8e}$

(1)

$F(y) = \int_0^y \frac{dt}{1+t^2}$ であるから,

$$\frac{d}{dy} F(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

である。したがって、 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

より、

$$\frac{d}{dx} F(\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

となる。また、 $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

より、

$$\frac{d}{dx} F(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{1 + (x + \sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x^2 - 1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{d}{dx} F(\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \frac{d}{dx} F(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{2x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(2)

ある実数の定数 a, b に対して、 $x \geq 1$ において等式

$$F(\sqrt{x^2 - 1}) = aF(x + \sqrt{x^2 - 1}) + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つとする。 $x > 1$ の範囲において①の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{a}{2x\sqrt{x^2 - 1}} \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

を得る。ここで①に $a = 2, x = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} F(0) &= 2F(1) + b \\ \Leftrightarrow b &= -2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

を得る。 $t = \tan \theta$ とおくと、

t	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

$$dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b &= -2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= -2 [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって $a = 2, b = -\frac{\pi}{2}$ が必要である。逆に a, b がこの値のとき、

$$\begin{aligned} g(x) &= F(\sqrt{x^2 - 1}) \\ h(x) &= 2F(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

とおく。これらは共に $x \geq 1$ において連続であり、(1)の結果より $x > 1$ の範囲で $g'(x) = h'(x)$ を満たす。また、 $g(1) = h(1)$ である。したがって

$$\begin{aligned} g(1) + \int_1^x g'(t) dt &= h(1) + \int_1^x h'(t) dt \\ \Leftrightarrow g(x) &= h(x) \end{aligned}$$

が成立する。よって、 $a = 2, b = -\frac{\pi}{2}$ に対して

$$F(\sqrt{x^2 - 1}) = aF(x + \sqrt{x^2 - 1}) + b$$

が成立する。

与式が成立すること: 前述

(答)

$$a = 2, b = -\frac{\pi}{2}$$

(1)

n 次多項式 $f(x)$ を, $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ (a_k は k 次の係数で $a_n \neq 0$) とする。このとき,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

となり, $a_n \neq 0$ より $f'(x)$ は $n-1$ 次多項式と分かる。これより, $f(x)$ を $f'(x)$ で割ったときの商は 1 次式であることが分かる。 $f(x)$ が $f'(x)$ で割り切れるので, 商を $px+q$ (p, q は実数) とおくと,

$$\sum_{k=1}^n a_k x^k = (px+q) \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

となり, x^n の項の係数を比較し,

$$\begin{aligned} a_n &= p n a_n \\ \therefore p &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

を得る。

(答) 次数は 1, 係数は $\frac{1}{n}$

(2)

(1) より,

$$f(x) = \left(\frac{1}{n} x + q \right) f'(x)$$

となるので, 両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{n} f'(x) + \left(\frac{1}{n} x + q \right) f''(x) \\ \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} f'(x) &= \left(\frac{1}{n} x + q \right) f''(x) \end{aligned}$$

となる。 $n-1 \geq 1$ であるから,

$$f'(x) = \frac{x+nq}{n-1} f''(x)$$

が成り立つ。これより, x の多項式として $f(x)$ が $f'(x)$ で割り切れるならば, x の多項式として $f'(x)$ は $f''(x)$ で割り切れることが示された。

(証明終)

(3)

m を $1 \leq m \leq n-2$ を満たす自然数とする。また, $f(x)$ を m 階微分した関数を $f^{(m)}(x)$ で表す。以下,

$$f^{(m)}(x) = \frac{x+nq}{n-m} f^{(m+1)}(x) \quad \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $m=1$ のとき

(2) より,

$$f^{(1)}(x) = \frac{x+nq}{n-1} f^{(2)}(x)$$

であり, $(*)$ が成り立つ。

[2] $m=k$ のとき

$$f^{(k)}(x) = \frac{x+nq}{n-k} f^{(k+1)}(x)$$

が成り立つと仮定する。このとき, 両辺を x で微分して,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{1}{n-k} f^{(k+1)}(x) + \frac{x+nq}{n-k} f^{(k+2)}(x) \\ \Leftrightarrow \frac{n-(k+1)}{n-k} f^{(k+1)}(x) &= \frac{x+nq}{n-k} f^{(k+2)}(x) \\ \Leftrightarrow f^{(k+1)}(x) &= \frac{x+nq}{n-(k+1)} f^{(k+2)}(x) \end{aligned}$$

となるので, $m=k$ で $(*)$ が成り立つなら, $m=k+1$ でも $(*)$ が成り立つ。

以上 [1], [2] より, $1 \leq m \leq n-1$ の自然数 m について,

$$f^{(m)}(x) = \frac{x+nq}{n-m} f^{(m+1)}(x)$$

が成り立つことが示された。したがって,

$$f(x) = \frac{x+nq}{n} f^{(1)}(x) = \frac{(x+nq)^2}{n(n-1)} f^{(2)}(x) = \cdots = \frac{(x+nq)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

となる。 $f(x)$ は n 次多項式であるから, $f^{(n)}(x)$ は定数であり, $f(x)$ が $(x+nq)^n$ で割り切れることが示された。

(証明終)

(1)

問題の設定より、条件を満たすのは各操作において袋A、袋C、袋E、袋Fから取り出す球が赤色である場合のみである。袋Aから赤球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ 、袋Cから赤球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ であり、そのうえで袋Eから赤球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ 、袋Gから赤球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ である。したがって、求める確率 p_1 は、

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{16}$$

(2)

袋Aと袋Bに入っている4個の球のそれぞれについて、ある球が袋Eで取り出される確率はすべて等しく $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。袋A、Bには赤球が全部で2個入っているから、袋Eで取り出す球が赤色である確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ である。同様に考えると、袋Fで取り出した球が赤色である確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ である。条件を満たすのは袋Eと袋Fで取り出す球がいずれも赤色となる場合のみであるから、求める確率 p_2 は、

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_2 = \frac{1}{4}$$

(3)

(2)と同様に考えると、求める確率 p_3 は、

$$p_3 = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) \cdot 4 = \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_3 = \frac{1}{4}$$