

平成 31 年度（前期日程）

入学者選抜学力検査問題

数 学 (120 分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計4枚）の受験番号記入欄（合計8箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で4問あり、2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 a を実数とする。 xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 e^{-2x^2}$ と直線 $L: y = ax$ を考える。直線 L は曲線 C との接点を 2 つ以上もつとする。

- (1) 実数 p に対し、曲線 C 上の点 $(p, p^3 e^{-2p^2})$ における C の接線の方程式を求めよ。
- (2) a の値を求めよ。
- (3) 0 以上の実数 x に対して、不等式 $ax \geq x^3 e^{-2x^2}$ が成り立つことを示せ。また、この不等式において等号が成立するような 0 以上の実数 x の値を求めよ。
- (4) xy 平面の $x \geq 0$ の範囲において、曲線 C と直線 L で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 実数全体で定義された関数 $F(y) = \int_0^y \frac{dt}{1+t^2}$ を考える。

- (1) x の関数 $F(\sqrt{x^2-1})$ ($x > 1$) の導関数を求めよ。また、 x の関数 $F(x + \sqrt{x^2-1})$ ($x > 1$) の導関数を求めよ。
- (2) ある実数の定数 a, b について、

$$F(\sqrt{x^2-1}) = aF(x + \sqrt{x^2-1}) + b \quad (x \geq 1)$$

が成立することを示し、このような a, b の値を 1 組求めよ。

(以下余白)

[前期]

3 n を自然数とする。実数を係数とする x の n 次多項式 $f(x)$ を考える。 $f'(x)$, $f''(x)$ はそれぞれ $f(x)$ の 1 階および 2 階の導関数とする。

- (1) x の多項式として $f(x)$ が $f'(x)$ で割り切れるとき、 x の多項式として $f(x)$ を $f'(x)$ で割ったときの商の、次数および最も次数の高い項の係数をそれぞれ求めよ。
- (2) n が 2 以上のとき、 x の多項式として $f(x)$ が $f'(x)$ で割り切れるならば、 x の多項式として $f'(x)$ は $f''(x)$ で割り切れることを示せ。
- (3) x の多項式として $f(x)$ が $f'(x)$ で割り切れるならば、ある実数 α に対し、 x の多項式として $f(x)$ は $(x - \alpha)^n$ で割り切れることを示せ。

4 袋 A, B, C, D にそれぞれ球がちょうど 2 つずつ入っているときに、次の操作 (*) を考える。

操作 (*): 最初に、袋 A と袋 B から 1 つずつ球を取り出し、空の袋 E に入れる。
つぎに、袋 C と袋 D から 1 つずつ球を取り出し、空の袋 F に入れる。
最後に、袋 E と袋 F から 1 つずつ球を取り出し、空の袋 G に入れる。

- (1) 袋 A, B, C, D にはそれぞれ球がちょうど 2 つずつ入っており、袋 A と袋 C にはともに白色の球と赤色の球が 1 つずつ入っており、袋 B と袋 D にはともに白色の球が 2 つずつ入っているとする。操作 (*) を行ったら、袋 G に赤色の球が 2 つ入っている確率 p_1 を求めよ。
- (2) 袋 A, B, C, D にはそれぞれ球がちょうど 2 つずつ入っており、袋 A, B, C, D にはいずれも白色の球と赤色の球が 1 つずつ入っているとする。操作 (*) を行ったら、袋 G に赤色の球が 2 つ入っている確率 p_2 を求めよ。
- (3) 袋 A, B, C, D にはそれぞれ球がちょうど 2 つずつ入っており、袋 A と袋 C にはともに青色の球と赤色の球が 1 つずつ入っており、袋 B と袋 D にはともに黄色の球と緑色の球が 1 つずつ入っているとする。操作 (*) を行ったら、袋 G に入っている 2 つの球の色が同じである確率 p_3 を求めよ。

(問題終り)

(以下余白)

[前期]

