



# 平成 7 年 度 入 学 試 験 問 題

## 数 学

総合人間<理系>・理・医・薬・工・農学部用

200 点満点

(医・工学部は 250 点満点に換算)

### (注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある。
3. 問題は全部で 6 題ある (1 ページから 3 ページ)。
4. 筆答開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙にはこれら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定されたページに書くこと。ただし、そこに書き切れない場合には、続き方をはっきり示し、下書き用ページに続きを書いてもよい。
6. 解答のための下書き、計算などは、下書き用ページに書き、消さないでそのまま残しておくこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換を  $f$  とする。平面上の 1 点を  $P$ , 原点を  $O$  とする。 $\overrightarrow{OP}$  の  $f$  による像を  $\overrightarrow{OQ}$ ,  $x$  軸に垂直で点  $Q$  を通る直線と  $x$  軸との交点を  $R$  とする。点  $P$  が  $O$  に一致しない範囲を動くとき,

$$\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|} \text{ の最大値が } 2, \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|} \text{ の最大値と最小値の比が } 3$$

となるように  $a, b$  の値を定めよ。

2

(30 点)

$a, b$  は  $a > b$  をみたす自然数とし,  $p, d$  は素数で  $p > 2$  とする。このとき,  $a^p - b^p = d$  であるならば,  $d$  を  $2p$  で割った余りが 1 であることを示せ。

3

(35 点)

$xy$  平面上の 2 曲線

$$C_1: y = x^3$$

$$C_2: y = ax^2 + bx + c$$

が相異なる 3 点で交わり, かつそれらの点で  $C_1$  に接する 3 直線が 1 点  $P = (p, q)$  で交わるとする。このとき,

(1)  $a = \frac{3}{2}p, b = 0, c = -\frac{1}{2}q$  であることを示せ。

(2)  $p, q$  のみたす条件を求めよ。

$x$  と  $y$  の 2 文字からなる文字列  $z_n$  を次の規則 (イ), (ロ) で順次定めていく。

- (イ)  $z_1 = x$  とおく。  
 (ロ)  $z_n$  の中に現れるすべての  $x$  を  $yx$  で、すべての  $y$  を  $xx$  で置き換えてできる文字列を  $z_{n+1}$  とする ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。

例えば  $z_2 = yx$ ,  $z_3 = xxyx$ ,  $z_4 = yxyxxxxyx$  である。2 次の正方行列  $A$ ,  $B$  に対して,  $z_n$  中の  $x$  を  $A$  で,  $y$  を  $B$  で置き換え, 行列の積をつくってできる行列を  $C_n$  とする。例えば  $C_1 = A$ ,  $C_2 = BA$ ,  $C_3 = AABA$  (行列の積) である。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ のとき, } n \geq 3 \text{ ならば } C_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを示せ。

1 番から 7 番まで番号のついた席が番号順に一列に並んでいる。客が順に到着して次のように着席していくとする。

- (イ) 両端の席および先客が着席している隣の席に次の客が着席する確率は、すべて等しい。  
 (ロ) 両隣が空席の席に着席する確率は、隣の席にすでに先客が着席している席または端の席に着席する確率に比べて 2 倍である。

このとき、

- (1) 3 人目の客が到着したときに、すでに 1 番と 3 番の席に先客が着席している確率を求めよ。  
 (2) 4 人目の客が到着したときに、すでに 2 番, 4 番, 6 番の席に先客が着席している確率を求めよ。

6

(35 点)

深さ  $h$  の容器がある。底は半径  $a$  ( $> 0$ ) の円板, 側面は  $x = f(y)$ ,  $0 \leq y \leq h$  のグラフを  $y$  軸のまわりに回転したものである。ただし  $f(y)$  は正の連続関数で  $f(0) = a$  とする。この容器に単位時間当たり  $V$  (一定) の割合で水を入れたとき,  $T$  時間後に一杯になり, しかも  $t$  ( $< T$ ) 時間後の水面の面積は  $Vt + \pi a^2$  であった。

関数  $f(y)$  を決定し,  $T$  を求めよ。