



平成 8 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

総合人間〈文系〉・文・教育・法・経済学部用

150 点満点

(文学部は 100 点満点に換算)

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある。
3. 問題は全部で 5 題ある (1 ページから 2 ページ)。
4. 筆答開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙にはこれら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定されたページに書くこと。ただし、そこに書き切れない場合には、続き方をはっきり示し、下書き用ページに続きを書いてもよい。
6. 解答のための下書き、計算などは、下書き用ページに書き、消さないでそのまま残しておくこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる。同じ円上の点 X に対し、平面上の点 Y を

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX}) \overrightarrow{OX}$$

で定める。ただし $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OX}$ の内積である。

このとき

- (1) $|\overrightarrow{OY}| = 1$ であることを示せ。
- (2) $\overrightarrow{OY} = -\overrightarrow{OA}$ となる点 X をすべて求めよ。
- (3) 点 X が円 C を 1 回まわるとき、点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ。

$0 < a \leq b$ をみたす実数 a, b に対し、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $a_1 = a, b_1 = b$,

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

によって定める。

- (1) すべての自然数 n に対し、 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ が成り立つことを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対し

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a_n} (b_n - a_n)^2$$

が成り立つことを示せ。

- (3) $a = 100, b = 900$ のとき、 $b_n - a_n < 4$ をみたす最小の n を求めよ。

3

(30 点)

各成分が 0 以上の整数である行列 A で、 $A^3 = A$ をみたすものをすべて求めよ。

4

(30 点)

正の実数 a に対し、実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_{-2}^2 |x - t|(t^2 - a^2) dt$$

で定める。このとき、 $g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ。また a がそのような範囲にあるとき、 $g(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

5

(30 点)

点 O を中心とする円周の 6 等分点を $P_1, P_2, \dots, P_6$ とする。サイコロを 3 回振り、出た目が順に i, j, k のときの得点を次のように定める。 i, j, k の中に同じものがあれば 0 点とする。 i, j, k がすべて異なるときは、円の中心 O が三角形 $\triangle P_i P_j P_k$ の内部にあれば 3 点、辺上にあれば 2 点、外部にあれば 1 点とする。得点の期待値を求めよ。

問題は、このページで終わりである。