

1

(30 点)

円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする.

- (イ) 三角形 ABC は正三角形である.
- (ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p : 1 - p$ ($0 < p < 1$) の比に内分する.
このときベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ.

2

(30 点)

実数 $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 3$) が条件

$$x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} > 0 \quad (2 \leq k \leq n-1)$$

を満たすとし, $x_1, \dots, x_n$ の最小値を m とする. このとき, $x_l = m$ となる l

($1 \leq l \leq n$) の個数は 1 または 2 であることを示せ.

3

(30 点)

$\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ, 0)$ とする.

(1) 長さ 1 の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し

$$\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad \cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

とおく. このとき次の不等式 (*) が成り立つことを示せ.

$$(*) \quad \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}$$

(2) 不等式 (*) を満たす (α, β) ($0^\circ \leq \alpha, \beta \leq 180^\circ$) の範囲を図示せよ.

三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a , b , c とする.
この三角形 ABC は次の条件 (イ), (ロ), (ハ) を満たすとする.

(イ) とともに 2 以上である自然数 p と q が存在して,

$$a = p + q, \quad b = pq + p, \quad c = pq + 1$$

となる.

(ロ) 自然数 n が存在して a , b , c のいずれかは 2^n である.

(ハ) $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ のいずれかは 60° である.

このとき次の問に答えよ.

(1) $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ を大きさの順に並べよ.

(2) a , b , c を求めよ.

5

(30 点)

a を実数とする. x の 2 次方程式

$$x^2 - ax = 2 \int_0^1 |t^2 - at| dt$$

は $0 \leq x \leq 1$ の範囲にいくつの解をもつか.