

1

(30 点)

円に内接する四角形 $ABPC$ は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする.

- (イ) 三角形 ABC は正三角形である.
- (ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p : 1 - p$ ($0 < p < 1$) の比に内分する.

このときベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ.

2

(35 点)

実数 a は $0 < a \leq 2$ の範囲を動くものとする.

(1) $y = \sqrt{x}$ と $y = \frac{2}{a}x + 1 - \frac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ.

(2) 2 次方程式 $(2x + a - 1)^2 = a^2x$ の複素数の範囲で考えた 2 つの解を α , β (ただし $|\alpha| \leq |\beta|$) とする. このとき, $|\beta|$ の最小値を求めよ.

3

(30 点)

$\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}, 0 \right)$ とする.

(1) 長さ 1 の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し

$$\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad \cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

とおく. このとき次の不等式(*)が成り立つことを示せ.

$$(*) \quad \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}$$

(2) 不等式(*)を満たす (α, β) ($0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$) の範囲を図示せよ.

4

(30 点)

p を素数, a, b を互いに素な正の整数とするとき, $(a + bi)^p$ は実数ではないことを示せ. ただし i は虚数単位を表す.

5

(40 点)

数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める.

$$c_n = (n + 1) \int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

このとき

- (1) c_n と c_{n+2} の関係を求めよ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ.
- (3) (2)で求めた極限値を c とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c}{c_n - c}$$

を求めよ.

n, k は整数で, $n \geq 2, 0 \leq k \leq 4$ とする. サイコロを n 回投げて出た目の和を 5 で割ったときの余りが k に等しくなる確率を $p_n(k)$ とする.

- (1) $p_{n+1}(0), \dots, p_{n+1}(4)$ を $p_n(0), \dots, p_n(4)$ を用いて表せ.
- (2) $p_n(0), \dots, p_n(4)$ の最大値を M_n , 最小値を m_n とするとき次の (イ), (ロ) が成立することを示せ.
 - (イ) $m_n \leq \frac{1}{5} \leq M_n$.
 - (ロ) 任意の k, l ($0 \leq k, l \leq 4$) に対し $p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leq \frac{1}{6} (M_n - m_n)$.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ を求めよ.