

1

(30 点)

未知数 x に関する方程式

$$x^4 - x^3 + x^2 - (a + 2)x - a - 3 = 0$$

が、虚軸上の複素数を解に持つような実数 a をすべて求めよ.

2

(30 点)

xy 平面内の相異なる 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 とベクトル $\vec{v}$ に対し, $k \neq m$ のとき $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする. このとき, k と異なるすべての m に対し

$$\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ.

3

(30 点)

任意の整数 n に対し, $n^9 - n^3$ は 9 で割り切れることを示せ.

4

(30 点)

n を 2 以上の整数とする. 実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ に対し,

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とおく. $k = 1, 2, \dots, n$ について, 不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする.

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

のとき, すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ.

5

(30 点)

xy 平面内の $-1 \leq y \leq 1$ で定められる領域 D と, 中心が P で原点 O を通る円 C を考える. C が D に含まれるという条件のもとで, P が動きうる範囲を図示し, その面積を求めよ.