

1

(30 点)

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3$ 上の点 P における接線を, P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする. C と L が, 相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ.

2

(30 点)

未知数 x に関する方程式

$$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - (a + 1)x + a = 0$$

が、虚軸上の複素数を解に持つような実数 a をすべて求めよ.

3

(35 点)

整数 n に対し $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ とおき, $a_n = i^{f(n)}$ と定める. ただし, i は虚数単位を表す. このとき,

$$a_{n+k} = a_n$$

が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ.

4

(30 点)

xyz 空間内の正八面体の頂点 $P_1, P_2, \dots, P_6$ とベクトル $\vec{v}$ に対し, $k \neq m$ のとき $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする. このとき, k と異なるすべての m に対し

$$\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ.

p を 2 以上の整数とする. 2 以上の整数 n に対し, 次の条件(イ), (ロ)をみたす複素数の組 $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ の個数を a_n とする.

(イ) $k = 1, 2, \dots, n$ に対し, $z_k^p = 1$ かつ, $z_k \neq 1$.

(ロ) $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) a_3 を求めよ.

(2) a_{n+2} を a_n, a_{n+1} の一方または両方を用いて表せ.

(3) a_n を求めよ.

6

(35 点)

次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx$$