

1

(30 点)

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す. この数列が
 $a_1 = 0, a_2 = 1, (n-1)^2 a_n = S_n \ (n \geq 1)$ を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ.

2

(30 点)

四角形 ABCD を底辺とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ を満たしており, 0 と異なる 4 つの実数 p, q, r, s に対して 4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{OP} = p \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = q \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = r \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OS} = s \overrightarrow{OD}$$

によって定める. このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s} \text{ が成立することを示せ.}$$

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする. 4 次方程式 $f(x) = 0$ の重複も込めた 4 つの解のうち, 2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという. このとき a, b, c の値を求めよ.

4

(30 点)

$0 \leq \theta < 360$ とし, a は定数とする.

$$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos\theta^\circ - 1 = a$$

を満たす θ の値はいくつあるか. a の値によって分類せよ.

5

(30 点)

4 個の整数 $1, a, b, c$ は $1 < a < b < c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると、 $1 + a$ から $b + c$ までのすべての整数の値が得られるという。 a, b, c の値を求めよ。

問題は、このページで終わりである。