

1

(30 点)

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す. この数列が

$$a_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ.

2

(35 点)

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A , B , C がある.

- (1) $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$ ならば $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることを示せ.
- (2) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$ が成立することを示せ. また, この等号が成立するのはどのような場合か.

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする. 4 次方程式 $f(x) = 0$ の重複も込めた 4 つの解のうち, 2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという. このとき a, b, c の値を求めよ.

4

(35 点)

- (1) $x \geq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ について, 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (2) 極方程式 $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) で定義される曲線の, $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを求めよ.

5

(35 点)

a, b, c を実数とする. $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点を持つという. このとき $a^2 > b$ が成立することを示し, さらにこれらの交点の x 座標は开区間 $(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$ に含まれていることを示せ.

$0 < \theta < 90$ とし, a は正の数とする. 複素数平面上の点 $z_0, z_1, z_2, \dots$ をつぎの条件(i), (ii)を満たすように定める.

(i) $z_0 = 0, z_1 = a$

(ii) $n \geq 1$ のとき, 点 $z_n - z_{n-1}$ を原点のまわりに θ° 回転すると点 $z_{n+1} - z_n$ に一致する.

このとき点 $z_n (n \geq 1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は, θ が有理数であることを示せ.

問題は, このページで終わりである.