

$$\frac{23}{111} = 0.207207207 \dots \dots \text{となる。}$$

すなわち、

$$P_i = \frac{207}{10^{3i}} \quad (i \geq 1) \text{ とすると}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = \frac{23}{111} \text{ である。}$$

$$\text{よって } \begin{cases} a_{3j+1} = 2 & (j \geq 0) \\ a_{3j+2} = 0 \\ a_{3j+3} = 7 \end{cases} \text{ となる}$$

$n = 3l \ (l \geq 1)$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} &= \left(\frac{2}{3} + \frac{0}{9} + \frac{7}{27} \right) \\ &\quad + \frac{1}{27} \left(\frac{2}{3} + \frac{0}{9} + \frac{7}{27} \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{27^{l-1}} \left(\frac{2}{3} + \frac{0}{9} + \frac{7}{27} \right) \\ &= \frac{25}{27} \left(1 + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{27^{l-1}} \right) \\ &= \frac{25}{27} \times \frac{1 - \frac{1}{27^l}}{1 - \frac{1}{27}} \\ &= \frac{25}{27} \times \frac{1 - \frac{1}{27^l}}{\frac{26}{27}} \\ &= \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^l} \right) \\ &= \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{3^{3l}} \right) \end{aligned}$$

$n = 3l+1$ のとき $(l \geq 0)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3l+1} \frac{a_k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{3l} \frac{a_k}{3^k} + \frac{a_{3l+1}}{3^{3l+1}} \\ &= \frac{25}{26} - \frac{25}{26} \times \frac{1}{27^l} + \frac{2}{27^l \cdot 3} \\ &= \frac{25}{26} + \frac{1}{27^l} \left(\frac{2}{3} - \frac{25}{26} \right) \\ &= \frac{25}{26} + \frac{1}{27^l} \left(\frac{-23}{26 \times 3} \right) \\ &= \frac{25}{26} - \frac{23}{27^l \times 78} \\ &= \frac{25}{26} - \frac{23}{26} \cdot \frac{1}{3^{3l+1}} \end{aligned}$$

$n = 3l+2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3l+2} \frac{a_k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{3l+1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{a_{3l+2}}{3^{3l+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{3l+1} \frac{a_k}{3^k} + 0 \\ &= \frac{25}{26} - \frac{23}{27^l \cdot 78} \\ &= \frac{25}{26} - \frac{23}{26} \cdot \frac{1}{3^{(3l+2)-1}} \end{aligned}$$

答

$$n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき} \dots \dots \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$n \text{ を } 3 \text{ で割ったあまりが } 1 \text{ のとき} \dots \dots \frac{25}{26} - \frac{23}{26} \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$n \text{ を } 3 \text{ で割ったあまりが } 2 \text{ のとき} \dots \dots \frac{25}{26} - \frac{23}{26} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$$

②

(1) 「C と l が異なる 2 点で交わる」

$$\iff [x^2 + x = kx + k - 1] \text{ が異なる}$$

2 実根をもつ」

$$\iff [x^2 + (1-k)x + (1-k) = 0] \text{ の判}$$

別式が正」

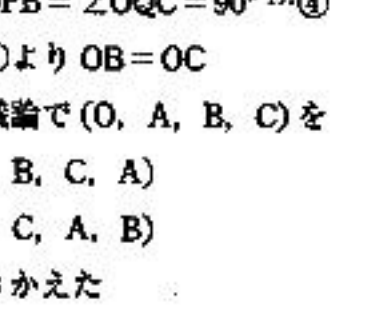
$$\iff (1-k)^2 - 4(1-k) > 0$$

$$\iff (k-1)(k+3) > 0$$

$$\iff k < -3 \text{ または } 1 < k$$

答 $k < -3$ または $k > 1$

(2)



C と l の交点の x 座標を α, β とする。

$\alpha < \beta$ とおける。

$$\text{ここで } x^2 + (1-k)x + 1-k = (x-\alpha)(x-\beta)$$

となっていることに注意。

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{ -(x-\alpha)(x-\beta) \} dx$$

$$= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3$$

l の傾きは k なので

$$L = (\beta - \alpha) \sqrt{1+k^2}$$

$$\text{よって } \frac{S}{L^3} = \frac{1}{6(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) の答えから、 $(1+k^2) > 2$

$$\text{よって } 0 < \frac{1}{(1+k^2)} < \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } 0 < \frac{S}{L^3} < \frac{1}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{答 } 0 < \frac{S}{L^3} < \frac{\sqrt{2}}{24}$$

③

O を原点として A, B, C の位置ベクトル

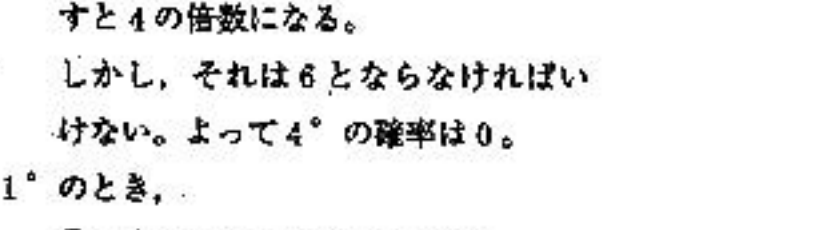
を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする

$$(i) \text{ より } \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

$$\vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \dots \dots \text{①}$$



$\left. \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right\}$ から OA におろした垂線の足を $\left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\}$

とする

$$\text{内積の定義より } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OP}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OQ}$$

$$\text{①より } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \iff \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OC}$$

$$\text{よって } \vec{OA} \cdot \vec{OP} = \vec{OA} \cdot \vec{OQ}$$

ここで A, P, Q, O は一直線上にあるので

$$P \text{ と } Q \text{ は一致する } \therefore OP = OQ \dots \text{②}$$

$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積は等しいので

$$PB = QC \dots \text{③}$$

$\triangle OPB$ と $\triangle OQC$ に注目すると、

$$\angle OPB = \angle OQC = 90^\circ \dots \text{④}$$

②③④より $OB = OC$

上の議論で (O, A, B, C) を

(O, B, C, A)

(O, C, A, B)

とおきかえた

議論より $OA = OB = OC$ が導かれる

また (O, A, B, C) を (A, O, B, C), (B,

O, A, C), (C, O, A, B) など

とおきかえると全ての辺の長さが等しい

ことが導かれる。

よって、四面体 OABC は正四面体

④

$x \neq y$ であると仮定して矛盾を導けば、示

したことになる。

x^2 を $2p$ で割ったあまり $\left. \begin{matrix} y^2 \text{ を } 2p \text{ で割ったあまり} \end{matrix} \right\}$ とが一致するので

$(x^2 - y^2)$ が $2p$ で割り切れる。

よって $[(x-y)(x+y)]$ が $2p$ で割り切れ

る。……①

①より「 x, y はともに偶数であるか、と

ともに奇数である。……②」

かつ「 $(x-y)$ か $(x+y)$ が p で割

り切れる。……③」

1° ②かつ

$(x-y)$ が p で割り切れるとすると

$$0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p, \text{ より}$$

$$0 \leq |x-y| \leq p \text{ である。}$$

$$p \text{ は素数で } x \neq y \text{ なので } |x-y| = p$$

$$\text{よって } (x, y) = (0, p) \text{ または}$$

$$(p, 0) \dots \dots \text{④}$$

ところで p は 3 以上の素数なので p は

奇数、よって④は②に矛盾する。

2° ②かつ $(x+y)$ が p で割り切れるとす

ると、

$$0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p \text{ より}$$

$$0 \leq x+y \leq 2p \text{ である。}$$

p は素数なので $x+y = p$ または $2p$

p は奇数である。

②より $x+y$ は偶数である。

$$\text{よって } x+y = 2p$$

$$0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p \text{ より } x=y=p$$

しかしこれは $x \neq y$ に矛盾する

$x \neq y$ を仮定すると 1° か 2° が成立す

るがいずれにしても矛盾が導かれた。

よって $x=y$

⑤

1° 1 位チームが 1 チームのとき

2° 1 位チームが 2 チームのとき

3° 1 位チームが 3 チームのとき

4° 1 位チームが 4 チームのとき

のいずれかが成立する、チーム名を A, B,

C, D とする。

$$\text{全試合数は } \frac{4 \times 3}{2} = 6。$$

各チームは 3 試合する。

4° のとき、A, B, C, D の勝ち数を足

すと 4 の倍数になる。

しかし、それは 6 とならなければい

けない。よって 4° の確率は 0。

1° のとき、

⑤ 1 位チームが 2 勝以下とする。

A, B, C, D の勝ち数の和は 5 以

下。有りえない。よってこの確率

は 0。

よって 1 位チームは 3 勝している。

⑥ 1 位チームが 3 勝のとき、

このとき他チームは 1 敗している

ので、他チームは 2 勝以下。

よって 1° の確率 P_1 は「あるチーム

が 3 勝している確率」と同じ。

「A が 3 勝 0 敗の確率」を Q_1 とする

と $P_1 = 4Q_1$ である。

$$Q_1 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \text{ よって } P_1 = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{2}$$

2° のとき、上の議論より 1 位チームは

2 勝以下

⑦ 1 位チームが 1 勝以下とする。A,

B, C, D の勝ち数の和は 2 以下

これは有りえない。この確率は 0

よって 1 位チームは 2 勝である。

⑧ 1 位チームが 2 勝のとき、

あるチームは 2 勝していて、別の

2 勝しているチームに勝っている。

…… α

あるチームは 2 勝していて、別の

2 勝しているチームに負けている。

…… β

あるチームは 1 勝していて、別の

1 勝しているチームに勝っている。

…… γ

あるチームは 1 勝していて、別の

1 勝しているチームに負けている。

…… δ

この 4 個の選び方は $4 \times 3 \times 2 \times 1$ 通り、

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が A, B, C, D となっ

ている確率は

	A	B	C	D
A		○	○	×
B	×		○	○
C	×	×		○
D	○	×	×	

$$\left(\frac{1}{2} \right)^6$$

(星取り表は上のように全試合決定さ

れることに注意)

$$\text{よって } (2^\circ \text{ の確率}) = (\text{⑧の確率})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^6 \times 4! = \frac{3}{8}$$

3° のとき、

先程 1° の確率は P_1 とおいた。

2° , 3° , 4° の確率を $P_2, P_3,$

P_4 とおけ

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \text{ に注意、}$$

$$\therefore P_2 = 1 - P_1 - P_2 - P_4$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - 0$$

$$= \frac{1}{8}$$

よって 1 位チーム数の期待値は

$$1 \times P_1 + 2 \times P_2 + 3 \times P_3 + 4 \times P_4$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 0$$

$$= \frac{4+6+3}{8} = \frac{13}{8}$$

$$\text{答 } \frac{13}{8}$$