

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)より } \log a_2 - \log a_1 &= \log 1 - \log 3 \\
 \log a_3 - \log a_2 &= \log 2 - \log 4 \\
 \log a_4 - \log a_3 &= \log 3 - \log 5 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \log a_{n-2} - \log a_{n-3} &= \log(n-3) - \log(n-1) \\
 \log a_{n-1} - \log a_{n-2} &= \log(n-2) - \log n \\
 \log a_n - \log a_{n-1} &= \log(n-1) - \log(n+1)
 \end{aligned}$$

が成立する。これにより以下の式が正しいことがわかる。($n \geq 4$ は上の複数個の式を左辺、右辺たしてわかる。 $n = 2, 3$ は直接代入してわかる。)

$$\begin{aligned}
 \log a_n - \log a_1 &= \log 1 + \log 2 - \log n - \log(n+1) \\
 &= \log 2 - \log n - \log(n+1) \quad (n \geq 2 \text{ で正しい})
 \end{aligned}$$

$$(i) \text{より } \log a_1 = \log 1 = 0$$

$$\text{よって } \log a_n = \log \frac{2}{n(n+1)} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{よって } a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad (n \geq 1 \text{ で成立})$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n a_i &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \frac{2n}{n+1}
 \end{aligned}$$

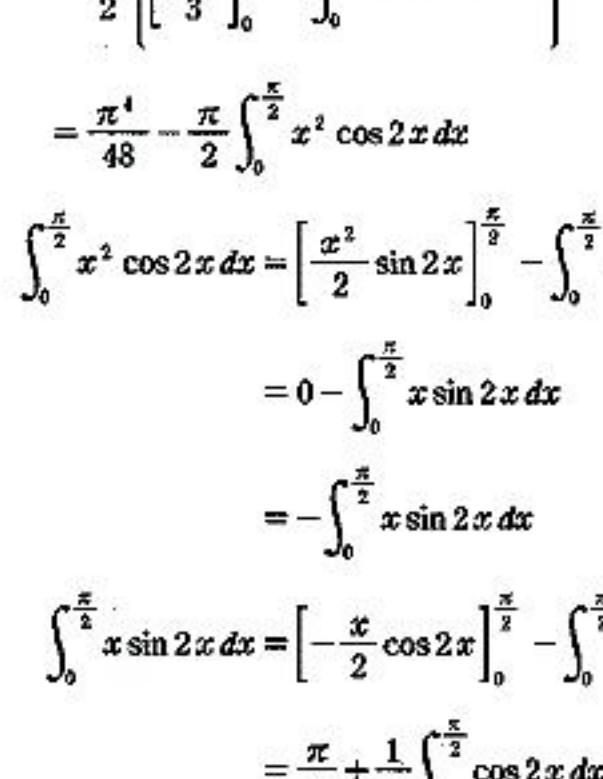
[2]

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

よって $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ での法線は $y = \pi - x$

$$f'(x) \geq 0 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ なので,}$$



斜線部を x 軸の回りに回してできる図形の体積を求める

$$A = \int_0^{\pi/2} \pi(\pi - x)^2 dx,$$

$$B = \int_0^{\pi/2} \pi(x \sin x)^2 dx \text{ とすると}$$

$$(\text{求める体積}) = A - B$$

$$A = \pi \int_0^{\pi/2} (x^2 - 2\pi x + \pi^2) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \pi x^2 + \pi^2 x \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi \times \pi^3 \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{7}{24} \pi^4$$

$$B = \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} (x^2 - x^2 \cos 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx \right]$$

$$= \frac{\pi^4}{48} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx = \left[\frac{x^2}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$$

$$= 0 - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$$

$$= - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx = \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx = -\frac{\pi}{4}$$

よって

$$\text{答} = A - B = \frac{7}{24} \pi^4 - \left(\frac{\pi^4}{48} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx \right)$$

$$= \frac{7}{24} \pi^4 - \frac{\pi^4}{48} + \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{13}{48} \pi^4 - \frac{1}{8} \pi^2$$

[3]

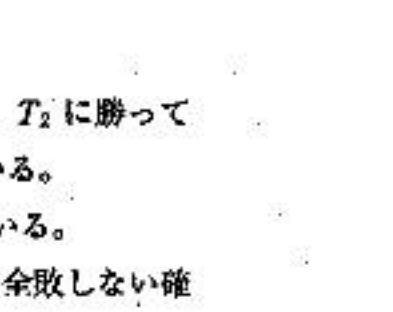
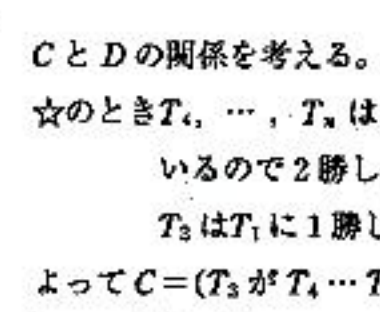
O を原点として A, B, C の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする

$$(i) \text{より } \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

$$\vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



$$\left. \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right\} \text{からOAにおろした垂線の足を} \left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right.$$

とする

$$\text{内積の定義より } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OP}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OQ}$$

$$\textcircled{1} \text{より } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \iff \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OC}$$

$$\text{よって } \vec{OA} \cdot \vec{OP} = \vec{OA} \cdot \vec{OQ}$$

ここで A, P, Q, O は一直線上にあるので P と Q は一致する $\therefore OP = OQ \dots\dots \textcircled{2}$

$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積は等しいので $PB = QC \dots\dots \textcircled{3}$

$\triangle OPB$ と $\triangle OQC$ に注目すると、
 $\angle OPB = \angle OQC = 90^\circ \dots\dots \textcircled{4}$

$$\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より } OB = OC$$

上の議論で (O, A, B, C) を
 (O, B, C, A)
 (O, C, A, B)

とおきかえた

議論より $OA = OB = OC$ が導かれる
 また (O, A, B, C) を $(A, O, B, C), (B, O, A, C), (C, O, A, B)$ など

とおきかえると全ての辺の長さが等しいことが導かれる。
 よって、四面体 $OABC$ は正四面体

[4]

$$f(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1 \text{ とおけ}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると } f(\omega) = 0 \text{ を満たす.}$$

$$\omega^3 = 1, \omega^2 = \bar{\omega}, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

が成立する

$$\begin{aligned}
 f(\omega) &= (\omega^{100} + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\
 &= (\omega + 1)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 \\
 &= (-\omega^2)^{100} + \omega^{100} + 1 \\
 &= \omega^{200} + \omega^{100} + 1 \\
 &= \omega^2 + \omega + 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{注意 } \omega^{100} = \omega^{99} \cdot \omega = 1 \cdot \omega = \omega$$

$$\omega^{200} = \omega^{199} \cdot \omega^2 = 1 \cdot \omega^2 = \omega^2 \text{ を使った.}$$

$f(\omega)$ は実数係数多項式なので
 $f(\omega) = 0$ より $f(\bar{\omega}) = 0 \therefore f(\omega^2) = 0$

よって $f(x)$ は $(x - \omega)(x - \omega^2)$ で割り切れる。
 ところで

$$\begin{aligned}
 (x - \omega)(x - \omega^2) &= x^2 + (-\omega - \omega^2)x + \omega^3 \\
 &= x^2 + x + 1
 \end{aligned}$$

よって $f(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れる。

[5]

1° $A = kE$ のとき、

$$A = kE \iff a = d \text{ かつ } b = c = 0$$

$$B = rE + sA = rE + skE = (r + sk)E$$

となる

$$\text{ところで } B = 0 \iff r + sk = 0 \text{ である.}$$

$$B = 0 \iff r + sk \neq 0 \text{ のとき}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{r + sk} E$$

$$\text{よって } A = kE \text{ のときは } a = d \text{ かつ } b = c = 0 \text{ が } (*) \text{ の必要十分条件}$$

2° $A \neq kE$ のとき

(v) $s = 0$ のときは $(*)$ の必要十分条件は「 $A \neq kE$ であるような任意の a, b, c, d 」

(i) $s \neq 0$ のとき、 B を $L(A)$ の任意の元とし、 B は零行列でないとする。

$$B = rE + sA = s \left(A + \frac{r}{s} E \right)$$

$$\text{ここで } \frac{r}{s} = x \text{ とおく.}$$

x は任意の実数をとる。
 B が逆行列をもつ

$$\iff A + xE \text{ が逆行列をもつ} \quad (x \text{ は任意の実数})$$

$$\iff \begin{pmatrix} a+x & b \\ c & d+x \end{pmatrix} \text{ が逆行列をもつ} \quad (x \text{ は任意の実数})$$

$$\iff (a+x)(d+x) - bc \neq 0 \quad (x \text{ は任意の実数})$$

$$\iff x^2 + (a+d)x + (ad-bc) \neq 0 \quad (x \text{ は任意の実数})$$

$$\iff x^2 + (a+d)x + (ad-bc) = \star$$

の解が虚数解のみ

$$\iff (\star \text{ の判別式}) = (a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$$

(v) より $A = kE$ のとき $(*)$ の必要十分条件は $(a+d)^2 < 4(ad-bc)$

$(*)$ が成立する。

$$\iff \text{「} A = kE \text{ であって } (*) \text{ が成立する」}$$

または「 $A \neq kE$ であって $(*)$ が成立する」

$$\iff \text{「} a = d \text{ かつ } b = c = 0 \text{」 または}$$

$$\text{「} a = d \text{ かつ } b = c = 0 \text{ が成立せず、かつ } (a+d)^2 < 4(ad-bc) \text{ が成立する」}$$

$$\iff \text{「} a = d \text{ かつ } b = c = 0 \text{」 または}$$

$$\text{「} (a+d)^2 < 4(ad-bc) \text{」}$$

[6]

n コのチームを $T_1, \dots, T_n$ とする、求める確率 A は 1 勝 $(n-2)$ 敗のチームが丁度 2 チームである確率と同じ。

ここで、この 2 チーム同士は 1 回対戦していて、どちらかがどちらかに 1 勝していることに注意。

T_1 は T_2 のみに 1 勝していて
 T_1 と T_2 のみが 1 勝 $(n-2)$ 敗である確率を B とする。

すると $A = n(n-1)B$ である。

ここで、1 勝 $(n-2)$ 敗の 2 チームのえらび方が $n(n-1)$ 通りであることと
 その 2 チームは区別できることに注意。

T_1 は T_2 のみに 1 勝していて
 T_2 は T_3 のみに 1 勝していて
 T_1 と T_2 のみが 1 勝 $(n-2)$ 敗である確率を C とする。

$B = (n-2)C$ である、ここで T_2 が勝ったチームのえらび方は $(n-2)$ 通りであることに注意。

$$\therefore A = n(n-1)(n-2)C$$

T_1 は T_2 のみに 1 勝
 T_2 は T_3 のみに 1 勝している確率を D とする。☆

C と D の関係を考える。

☆のとき $T_1, \dots, T_n$ は T_1, T_2 に勝っているので 2 勝している。
 T_3 は T_1 に 1 勝している。

よって $C = (T_3 \text{ が } T_1, \dots, T_n \text{ に全敗しない確率}) \times D$

$$= \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right] D$$

$$D \text{ は } \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-5}$$

よって

$$A = n(n-1)(n-2) \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right] \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-5}$$