

1

(30 点)

$\frac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す. すなわち小数第 k 位の数を a_k とする. このとき $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$ を求めよ.

xy 平面上で、放物線 $C: y = x^2 + x$ と、直線 $l: y = kx + k - 1$ を考える. このとき次の問に答えよ.

- (1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ.
- (2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし、線分 PQ の長さを L , 線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする. k が (1) で定まる範囲を動くとき、 $\frac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ.

3

(30 点)

四面体 $OABC$ は次の 2 つの条件

- (i) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$
- (ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている. このとき, この四面体は正四面体であることを示せ.

4

(30 点)

p は 3 以上の素数であり, x, y は $0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p$ をみたす整数であるとする. このとき x^2 を $2p$ で割った余りと, y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ, $x = y$ であることを示せ.

5

(30 点)

4 チームがリーグ戦を行う. すなわち, 各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する. 引き分けはないものとし, 勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で, 各回の勝敗は独立に決まるものとする. 勝ち数の多い順に順位をつけ, 勝ち数が同じであればそれらは同順位とする. 1 位のチーム数の期待値を求めよ.