

1

(30 点)

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が次の条件 (i), (ii) をみたすとき, $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ.

(i) $a_1 = 1$

(ii) $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1) \quad (n \geq 2)$

2

(35 点)

$f(x) = x \sin x$ ($x \geq 0$) とする. 点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ における $y = f(x)$ の法線と, $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分, および y 軸とで囲まれる図形を考える. この図形を x 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

3

(30 点)

四面体 $OABC$ は次の 2 つの条件

- (i) $OA \perp BC$, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$
- (ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている, このとき, この四面体は正四面体であることを示せ.

4

(35 点)

多項式 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は多項式 $x^2 + x + 1$ で割り切れるか.

a, b, c, d を実数とする. 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 次の単位行列

E に対して, 集合 $L(A)$ を

$$L(A) = \{ rE + sA \mid r, s \text{ は実数} \}$$

とする. このとき次の条件(*)が成立するための, a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ.

(*) $L(A)$ の要素 B は零行列でなければ逆行列をもつ

6

(35 点)

n チームがリーグ戦を行う. すなわち, 各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する. 引き分けはないものとし, 勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で, 各回の勝敗は独立に決まるものとする. このとき, $(n-2)$ 勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームである確率を求めよ. ただし, n は 3 以上とする.