

$$L: y = 2x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

であり、曲線の式と連立させて y を消去すると、

$$x^2 + (a-2)x + b = 0 \quad \cdots \text{①}$$

この方程式が $0 \leq x \leq 1$ で解をもつための (a, b) の条件を調べる。

以下、①の左辺を $f(x)$ 、判別式を D とし、

$y = f(x)$ のグラフについて考える。

(i) 軸が $0 \leq x \leq 1$ にあるとき、つまり $0 \leq a \leq 2$ のとき、

$$D \geq 0 \text{ かつ、} (f(0) \geq 0 \text{ または } f(1) \geq 0)$$

(ii) 軸が $0 \leq x \leq 1$ の外にあるとき、つまり $a < 0$, $2 < a$ のとき、

$$f(0)f(1) \leq 0$$

よって、

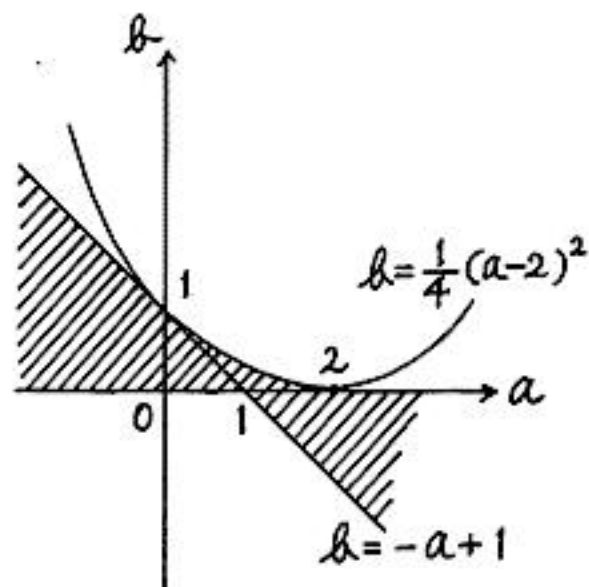
$$D = (a-2)^2 - 4b$$

$$f(0) = b, \quad f(1) = b + a - 1$$

より、

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 2 \text{ のとき、} \\ \quad b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2 \text{ かつ、} (b \geq 0 \text{ または } b \geq -a+1) \\ a < 0, 2 < a \text{ のとき、} \\ \quad b(b+a-1) \leq 0 \end{cases}$$

これを a b 平面上に図示すると
右図の斜線部になり、
境界を含む。



$$\boxed{2} \quad 2^{10} < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$$

$$\Leftrightarrow 10 \log_{10} 2 < n \log_{10} \frac{5}{4} < 20 \log_{10} 2$$

両辺の
常用対数
をとる

$$\Leftrightarrow 10 \log_{10} 2 < n \log_{10} \frac{10}{8} < 20 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow 10 \log_{10} 2 < n (1 - 3 \log_{10} 2) < 20 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot \frac{\log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} < n < 20 \cdot \frac{\log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2}$$

$$\therefore \frac{\log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{10} 2} - 3} \approx 0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{\frac{1}{0.301} - 3} < \frac{1}{\frac{1}{\log_{10} 2} - 3} < \frac{1}{\frac{1}{0.3011} - 3}$$

すなわち

$$3.103 < \frac{0.301}{1 - 3 \times 0.301} < \frac{\log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} < \frac{0.3011}{1 - 3 \times 0.3011} < 3.114$$

$$\text{よって} \quad 10 \times 3.103 < 10 \cdot \frac{\log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} < n < 20 \cdot \frac{\log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} < 20 \times 3.114$$

$$\text{したがって} \quad 31.03 < n < 62.28$$

よって 求める n は 32 から 62 の自然数で、その個数は

$$\underline{31} \quad \#$$

$$\boxed{4} \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

に注意すると $65 = 5 \times 13$ より

$$(a-b, a^2 + ab + b^2) = (1, 65), (5, 13), (13, 5), (65, 1)$$

の4通りに限られる。

$$(a-b, a^2 + ab + b^2) = (1, 65) \text{ のとき}$$

$$a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 + 3ab \text{ より } 3ab = 64 \dots \textcircled{1}$$

とあり、 a, b は整数より、 $\textcircled{1}$ を満たす a, b は存在しない。

$$(a-b, a^2 + ab + b^2) = (5, 13) \text{ のとき}$$

$$a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 + 3ab \text{ より } ab = -4$$

これに $a = 5 + b$ を代入して

$$b^2 + 5b + 4 = 0 \Leftrightarrow (b+1)(b+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -1, -4.$$

$$\text{よって } (a, b) = (4, -1) \wedge (1, -4)$$

$$(a-b, a^2 + ab + b^2) = (13, 5) \text{ のとき}$$

$$a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 + 3ab \text{ より } 3ab = -164 \dots \textcircled{2}$$

とあり、 a, b は整数より、 $\textcircled{2}$ を満たす a, b は存在しない。

$$(a-b, a^2 + ab + b^2) = (65, 1) \text{ のとき}$$

$$a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 + 3ab \text{ より } ab = -11 \times 128$$

このとき、 $a, b < 0$, $a-b$: 正の奇数, a, b は整数より

$(a, b) = (\text{正の奇数}, \text{負の偶数})$ または $(\text{正の偶数}, \text{負の奇数})$

したがって、 $(a, b) = (1, -11 \times 128), (11, -128)$

$(11 \times 128, -1), (128, -11)$ に限られるが

これらは $a-b = 65$ を満たさない。

以上より、求める (a, b) の組は、

$$(a, b) = \underline{(4, -1), (1, -4)}$$

である。

⑤ 全事象は n コの中から 3 コをとる組合せなので、

$$nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{通りある.}$$

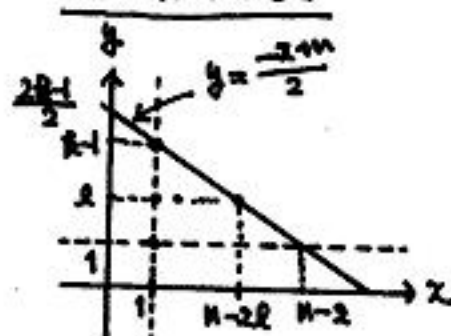
取り出した 3 数が等差数列なので、取り出した 3 数の組は、

$$(x, x+y, x+2y) \quad (x \geq 1, y \geq 1, x+2y \leq n)$$

とひける。ところで、「組 $(x, x+y, x+2y)$ の 1 つ」と「組 (x, y) の 1 組」が対応するので
 xy 平面上的格子点 (x, y) で $x \geq 1, y \geq 1, x+2y \leq n$

を満足するものの個数 S_n を求めればよい。

$n=2k-1$ のとき

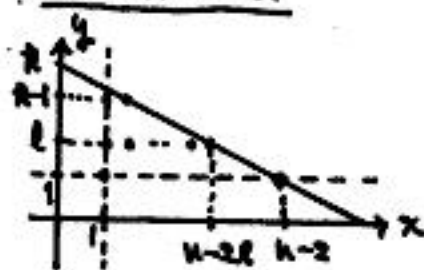


$y=l \ (1 \leq l \leq k-1)$ での格子点の個数 a_l は
 左図より

$$a_l = n - 2l$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{l=1}^{k-1} (n - 2l) \\ &= n(k-1) - 2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \\ &= (n-k)(k-1) \\ &= \frac{(n-1)^2}{4} \end{aligned}$$

$n=2k$ のとき、



$y=l \ (1 \leq l \leq k-1)$ での格子点の個数 b_l は
 左図より

$$b_l = n - 2l$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{l=1}^{k-1} (n - 2l) \\ &= (n-k)(k-1) \\ &= \frac{n(n-2)}{4} \end{aligned}$$

したがって 求める確率は、 $\frac{S_n}{nC_3}$ より

$$\begin{cases} \frac{3(n-1)}{2n(n-2)} & (n: \text{奇数}) \\ \frac{3}{2(n-1)} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$