

$$L: y = 2x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

であり、曲線の式と連立させて y を消去すると、

$$x^2 + (a-2)x + b = 0 \quad \cdots \text{①}$$

この方程式が $0 \leq x \leq 1$ で解をもつための (a, b) の条件を調べる。

以下、①の左辺を $f(x)$ 、判別式を D とし、

$y = f(x)$ のグラフについて考える。

(i) 軸が $0 \leq x \leq 1$ にあるとき、つまり $0 \leq a \leq 2$ のとき、

$$D \geq 0 \text{ かつ、} (f(0) \geq 0 \text{ または } f(1) \geq 0)$$

(ii) 軸が $0 \leq x \leq 1$ の外にあるとき、つまり $a < 0$, $2 < a$ のとき、

$$f(0)f(1) \leq 0$$

よって、

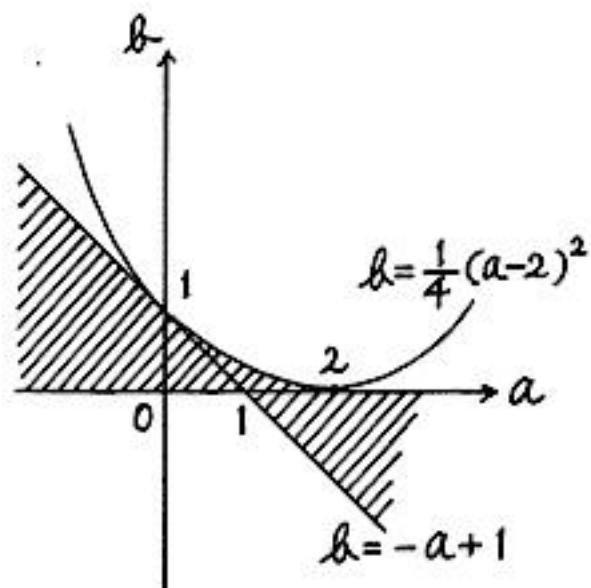
$$D = (a-2)^2 - 4b$$

$$f(0) = b, \quad f(1) = b + a - 1$$

より、

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 2 \text{ のとき、} \\ \quad b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2 \text{ かつ、} (b \geq 0 \text{ または } b \geq -a+1) \\ a < 0, 2 < a \text{ のとき、} \\ \quad b(b+a-1) \leq 0 \end{cases}$$

これを a, b 平面上に図示すると
右図の斜線部になり、
境界を含む。



2

$\left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(\frac{10}{8}\right)^n = \frac{10^n}{2^{3n}}$ より、与えられた不等式は、

$$2^{3n+10} < 10^n < 2^{3n+20}$$

$$(3n+10)\log_{10}2 < n < (3n+20)\log_{10}2$$

$$\frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2} < n < \frac{20\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}$$

となる。ここで、

$$a = \frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}$$

とすると、 $a < n < 2a$ であり、

$$\frac{10 \cdot 0.301}{1 - 3 \cdot 0.301} < a < \frac{10 \cdot 0.3011}{1 - 3 \cdot 0.3011}$$

$$\frac{3010}{97} < a < \frac{30110}{967}$$

である。

$$\begin{cases} \frac{3010}{97} = 31.0... \\ \frac{30110}{967} = 31.1... \end{cases}$$

より、 $31 < a < 31.2$ が得られ、

$62 < 2a < 62.4$ となるから、

$$32 \leq n \leq 62$$

よって、31個 (答)

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

から γ を消去すると、

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2 = 0$$

$$\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2 = 0$$

ここで、 $\alpha = 0$ とすると、 $\beta = 0$ となり、 α と β が相異なることに反するから、 $\alpha \neq 0$ で、

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

①より、

$$\begin{aligned} \gamma &= -(\alpha + \beta) = -\left(1 + \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)\alpha \\ &= \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} \alpha \end{aligned}$$

よって、

$$\omega = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

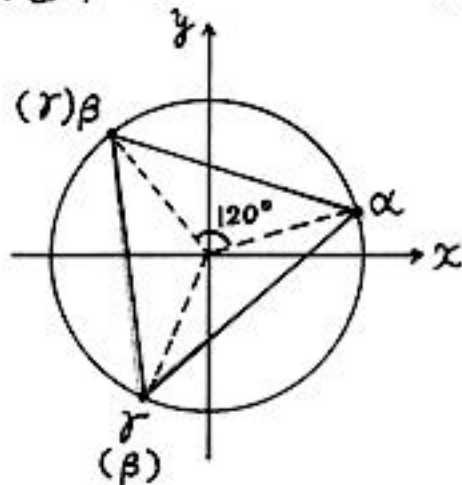
と表すことにすると、

$$(\beta, \gamma) = (\omega\alpha, \omega^2\alpha), (\omega^2\alpha, \omega\alpha) \quad (\alpha \neq 0)$$

すなわち、点 β, γ は、それぞれ点 α を原点中心に $\pm \frac{2\pi}{3}$, $\mp \frac{2\pi}{3}$ だけ回転した点である。(以上、複号同順)

よって、 α, β, γ の3点を結んだ三角形は、

原点を中心とした円に内接する正三角形である。(答)



理 ④

$$a^3 - b^3 = 217 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) = 7 \cdot 31$$

とあり, 7 と 31 は素数. $\pm 31 \leq a^2+ab+b^2$, $a^3 > b^3$ より $a > b$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} a-b \\ a^2+ab+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 217 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 217 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって, $a^2+ab+b^2 = (a-b)^2 + 3ab$ を用いると,

$$\begin{pmatrix} a-b \\ ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ -318 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 217 \\ -218 \cdot 72 \end{pmatrix}$$

$\pm 31 \leq -b = c$ とおくと

$$\begin{pmatrix} a+c \\ ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ 318 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 217 \\ 218 \cdot 72 \end{pmatrix}$$

(i) $(a+c, ac) = (1, -72)$ あり.

a, c は, $x^2 - x - 72 = 0$ の解より. $(a, c) = (9, -8), (-8, 9)$

よって $(a, b) = (9, 8), (-8, -9)$

(ii) $(a+c, ac) = (7, 6)$ あり.

a, c は, $x^2 - 7x + 6 = 0$ の解より, $(a, c) = (1, 6), (6, 1)$

よって, $(a, b) = (1, -6), (6, -1)$

(iii) $(a+c, ac) = (31, 318)$ あり.

a, c は, $x^2 - 31x + 318 = 0$ の解であるが, この2:2方程式は.

整数解をもたない. よって, 不適

(iv) $(a+c, ac) = (217, 218 \cdot 72)$ あり.

a, c は, $x^2 - 217x + 218 \cdot 72 = 0$ の解であるが, この2:2方程式は

整数解をもたない. よって, 不適

以上より, $(a, b) = (9, 8), (-8, -9), (1, -6), (6, -1)$

理 [5]

i) ii) $2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ において,

$$\cos x > 0, \frac{1-x^2}{1+x^2} < 0 \text{ より, } C_1 \text{ と } C_2 \text{ は共有点を持たない.}$$

iii) $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq (2k+1)\pi$ において,

$$f(x) = \cos x - \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ である.}$$

$$\begin{cases} f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{1 - (2k\pi + \frac{\pi}{2})^2}{1 + (2k\pi + \frac{\pi}{2})^2} > 0 \\ f((2k+1)\pi) = -1 - \frac{1 - (2k\pi + \pi)^2}{1 + (2k\pi + \pi)^2} = \frac{-2}{1 + (2k\pi + \pi)^2} < 0 \end{cases}$$

また, $f(x)$ は連続関数である. したがって, 中間値の定理より,

$$f(\alpha) = 0, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi \quad \text{--- ①}$$

を満たす α が存在する. よって, C_1 と C_2 は共有点を持つ.

したがって, この共有点における C_1 の接線 l である.

$$l: y - \cos \alpha = (-\sin \alpha)(x - \alpha)$$

$$\text{すなわち, } x = 0 \text{ と置くと, } y = \alpha \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$\text{と置く. ①より, } \cos \alpha = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \quad \sin \alpha > 0, \alpha > 0 \text{ より}$$

$$\alpha \sin \alpha + \cos \alpha = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2} + \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \alpha \cdot \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = 1$$

以上 (i) (ii) より, 証明終. ■

(2) (1) より, 共有点の x 座標 α は,

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi, \quad \alpha \sin \alpha + \cos \alpha = 1 \quad \text{--- ②}$$

を満たす. したがって, ②を満たす α がただ一つだけ存在する = とを示せばよい.

$$\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1 = g(\alpha)$$

$$\text{である. } g(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = (2k\pi + \frac{\pi}{2}) - 1 > 0, \quad g((2k+1)\pi) = -2 < 0$$

$$\text{また, } g'(\alpha) = \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - \sin \alpha = \alpha \cos \alpha < 0 \quad (2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi \text{ において}) \text{ より,}$$

$g(\alpha)$ は単調減少

よって, ②を満たす α はただ一つ. ■

理 6

求める塗り方を a_n 通りとする。赤, 青, 黄をそれぞれ R, B, Y と表す。

$n=2$ のとき $R \begin{array}{l} \text{---} R \\ \text{---} B \\ \text{---} Y \end{array}, B-R, Y-R$ の 5通りで, $a_2 = 5 \dots ①$

$n=3$ のとき $R \begin{array}{l} \text{---} R \begin{array}{l} \text{---} R \\ \text{---} B \\ \text{---} Y \end{array} \\ \text{---} B \text{---} R \\ \text{---} Y \text{---} R \end{array}, B-R \begin{array}{l} \text{---} R \\ \text{---} B \\ \text{---} Y \end{array}, Y-R \begin{array}{l} \text{---} R \\ \text{---} B \\ \text{---} Y \end{array}$ より, $a_3 = 11 \dots ②$

よって, a_{n+2} について

条件「隣り合った車両の少なくとも一方は赤色である」を (*) とする。

1 車両目は, R, B, Y のいずれかであり。

- (i) R のとき, 2 車両目 $\sim n+2$ 車両目の $n+1$ 車両目は (*) の条件を満たせばよい。
したがって, a_{n+1} 通り
- (ii) B のとき, 2 車両目は R であり, 3 車両目 $\sim n+2$ 車両目の n 車両目は (*) の条件を満たせばよい。したがって, a_n 通り
- (iii) Y のとき, (ii) と同様にして, a_n 通り

よって $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n \geq 2)$

表すすると $\begin{cases} a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) \end{cases}$

これと ①② より。

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_n = (a_3 + a_2) \cdot 2^{n-2} = 2^{n+2} & \dots\dots ③ \\ a_{n+1} - 2a_n = (a_3 - 2a_2) \cdot (-1)^{n-2} = (-1)^{n-2} = (-1)^{n+2} & \dots\dots ④ \end{cases}$$

③-④ より

$$\underline{\underline{a_n = \frac{1}{3} \{ 2^{n+2} - (-1)^{n+2} \}}}$$