

1

$$\begin{cases} C: y=x^2 & \text{--- ①} \\ l_1: y=px-1 & \text{--- ②} \\ l_2: y=-x-p+4 & \text{--- ③} \end{cases}$$

l_1 と l_2 の交点を求める。②③を連立して、

$$px-1 = -x-p+4$$

$$(p+1)x = 5-p$$

よって、 $p \neq -1$ のとき、②③の交点は $\left(\frac{5-p}{p+1}, \frac{p(5-p)}{p+1} - 1\right) = \left(\frac{5-p}{p+1}, \frac{-p^2+4p-1}{p+1}\right)$

この点が C 上にある。①に代入して

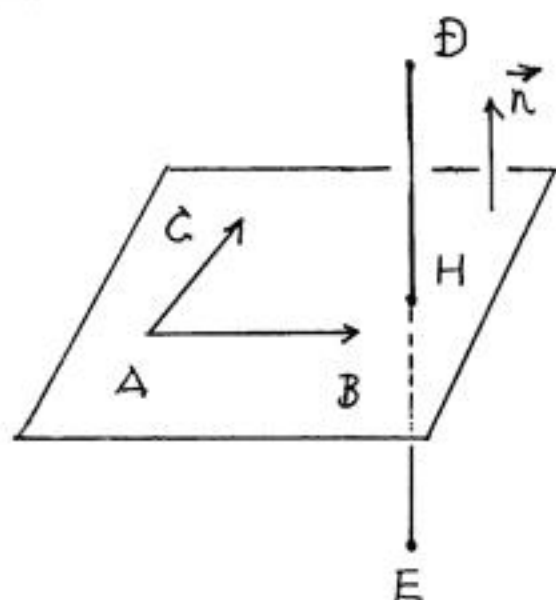
$$\frac{-p^2+4p-1}{p+1} = \left(\frac{5-p}{p+1}\right)^2$$

$$p^3 - 2p^2 - 13p + 26 = 0$$

$$(p-2)(p^2-13) = 0$$

よって $p=2, \pm\sqrt{13}$ ----- (X)

2



Dから平面ABCに下した垂線の足をHとすると

$$\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{DE} = \vec{OD} + 2\vec{DH} \quad \text{--- ①}$$

よって、平面ABCの法線ベクトルは $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると、

$$\vec{n} \perp \vec{AB}, \vec{n} \perp \vec{AC} \text{ かつ}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\text{よって } \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ -2a + 2c = 0 \end{cases} \text{ かつ } \begin{cases} c = a \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{よって } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ --- ② とすれば、}$$

Hは次の(i) (ii)を満たす点である。

(i) $\vec{DH} \perp \text{平面} ABC$

(ii) Hは平面ABC上

$$\begin{cases} \text{(i)より} & \vec{DH} = k\vec{n} \text{ --- ③ とおす。} \\ \text{(ii)より} & \vec{n} \cdot \vec{AH} = 0 \text{ --- ④ とおす。} \end{cases}$$

$$\text{④より } \vec{n} \cdot (\vec{DH} - \vec{DA}) = 0$$

$$\text{③を用いて } \vec{n} \cdot (k\vec{n} - \vec{DA}) = 0$$

$$k = \frac{\vec{n} \cdot \vec{DA}}{|\vec{n}|^2}$$

$$\text{②より } \vec{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ かつ } k = -3 \text{ --- ⑤}$$

$$\text{①③⑤より } \vec{OE} = \vec{OD} + 2k\vec{n} = \vec{OD} - 6\vec{n}$$

$$\text{よって } \underline{\underline{E(-5, 3, 1) \text{ である。}}}$$

3

<解1>

$P(x)$ は 2次式 $Q(x)$ で割り切れないので, $(a, b) \neq (0, 0)$ ---- ①をみたす定数 a, b を用いて,

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + ax + b \quad (R(x): \text{整式})$$

と表わす。これから

$$\{P(x)\}^2 = \{Q(x) \cdot R(x)\}^2 + 2(ax+b)Q(x) \cdot R(x) + (ax+b)^2$$

となるが, この右辺 $Q(x)$ で割り切れるので,

$(ax+b)^2$ も 2次式 $Q(x)$ で割り切れる

がわかる。

$$(ax+b)^2 = c \cdot Q(x) \quad (\text{ただし, } c \text{ は定数})$$

と表わす。ここで, $c=0$ と仮定すると, $a=b=0$ となり, ①に矛盾する。したがって,

$c \neq 0$ であり,

$$Q(x) = \frac{1}{c} (ax+b)^2 \quad \text{--- ②}$$

②と $Q(x)$ が 2次式より

$$a \neq 0$$

であり,

$$Q(x)=0 \text{ は 重解 } x = -\frac{b}{a} \text{ をもつ}$$

<解2>

$Q(x)$ は 2次式より,

$$Q(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) \quad (a \neq 0) \quad \text{--- ①}$$

と表わす。 $\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるので,

$$\{P(x)\}^2 = a(x-\alpha)(x-\beta) \cdot R(x)$$

と表わす,

$$\{P(\alpha)\}^2 = 0, \quad \{P(\beta)\}^2 = 0$$

がわかる。

$$P(\alpha) = 0, \quad P(\beta) = 0 \quad \text{--- ②}$$

ここで, $\alpha \neq \beta$ と仮定すると, ②と因数定理より,

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \cdot S(x)$$

と表わす。①を用いて

$$P(x) = Q(x) \cdot \frac{1}{a} S(x)$$

となり, $P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れないという条件と矛盾する。

したがって, 仮定 $\alpha \neq \beta$ が誤りであり, $\alpha = \beta$ を得る。

4

$x \leq 0$ の場合

$$f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (a \neq 0)$$

とあり、さらに、 $f(0) = 0$ より、

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{より、} a = -1$$

よって、

$$f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \quad \text{よって、} f(x) = -x^2 - x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x \geq 0$ の場合

$y = f(x)$ のグラフは 図 5 のように、より、

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad \text{よって、} f(x) = x^2 - x$$

より、点 $(-1, f(-1))$ に 2 つの接線と接する、より、

$$l: y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$$

よって、 $l: y = x + 1$

また $y = f(x)$ ($x \geq 0$) のグラフの方程式は、

$$x + 1 = x^2 - x$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

より、 $x = 1 + \sqrt{2}$ とある。

よって、求める面積を S とすると、図 5 より、

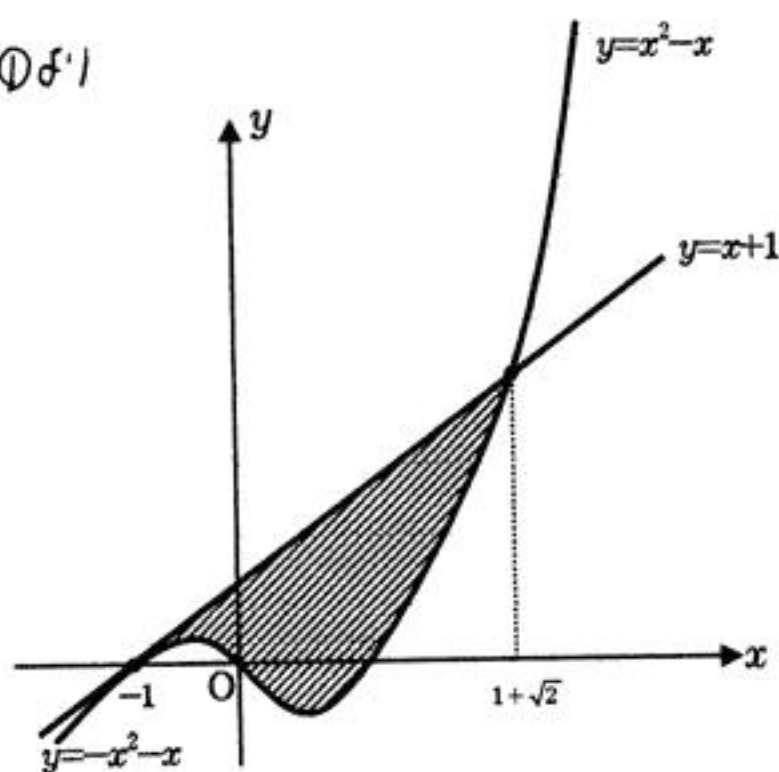
$$S = \int_{-1}^0 \{(x+1) - (-x^2-x)\} dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \{(x+1) - (x^2-x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} (-x^2 + 2x + 1) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \{-(x-1)^2 + 2\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}(x-1)^3 + 2x \right]_0^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

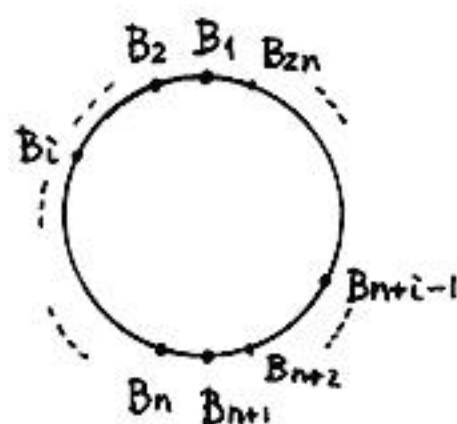


5

円周上に並んで $2n$ 個の玉を、図のように、

$B_1, B_2, \dots, B_{2n}$

と名前を付ける。



(1) $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ のうちの白玉の個数

(2) $B_2, B_3, \dots, B_n, B_{n+1}$ のうちの白玉の個数

(i) $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{n+i-2}, B_{n+i-1}$ のうちの白玉の個数

(i+1) $B_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_{n+i}, B_{n+i+1}$ のうちの白玉の個数

(n+1) $B_{n+1}, B_{n+2}, \dots, B_{2n-1}, B_{2n}$ のうちの白玉の個数

を数える。(1), (2), (3), ... と順に 白玉の個数の変化を見るとき、

(i) と (i+1) では、 $B_{i+1} \sim B_{n+i-1}$ は共通であるので、 B_i と B_{n+i} の色か白か黒かで場合分けして、

$$\left\{ \begin{array}{ll} (B_i, B_{n+i}) = (0, 0), (\bullet, \bullet) \text{ のとき} & \text{白玉の個数は変化する} \\ (B_i, B_{n+i}) = (\bullet, 0) \text{ のとき} & \text{白玉の個数は1個増加} \\ (B_i, B_{n+i}) = (0, \bullet) \text{ のとき} & \text{白玉の個数は1個減少} \end{array} \right. \quad \text{--- ①}$$

$$\text{よって、} [(1) \text{での白玉の個数}] + [(n+1) \text{での白玉の個数}] = [B_1, \dots, B_{2n} \text{ のうちの白玉の個数}] = 2k \quad \text{--- ②}$$

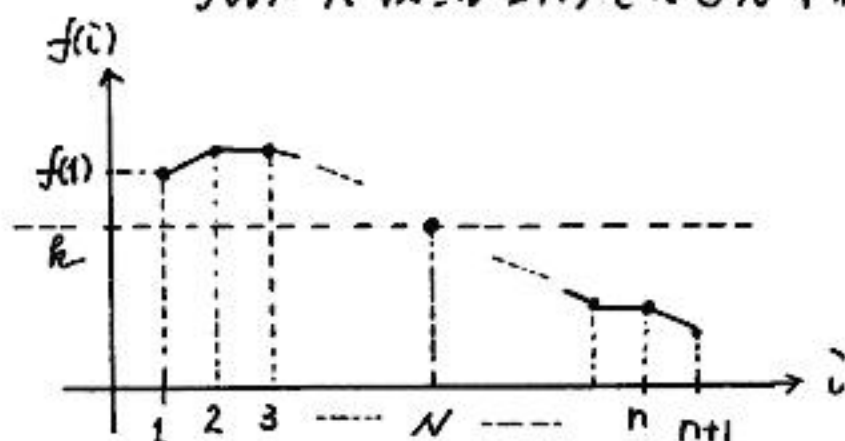
ここで、 $[(i) \text{での白玉の個数}] = f(i)$ とおくと、

「 $f(N) = k$ となる N が存在する」とを示さねばならない。

(i) $f(1) = k$ のとき、 $N=1$ とすればよい。

(ii) $f(1) > k$ のとき、②を用いると $f(n+1) < k$ 。よって、①より

$f(N) = k$ ($2 \leq N \leq n$) となる N が存在する。



(iii) $f(1) < k$ のとき、(ii) と同様にしてよい。

以上 (i) ~ (iii) より、題意は示された。 ■