

1

<解1>

$P(x)$ は 2次式 $Q(x)$ で割り切れないので, $(a, b) \neq (0, 0)$ ---- ① をみたす定数 a, b を用いて,

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + ax + b \quad (R(x): \text{整式})$$

と表わす。これから

$$\{P(x)\}^2 = \{Q(x) \cdot R(x)\}^2 + 2(ax+b)Q(x) \cdot R(x) + (ax+b)^2$$

となるが, この右辺 $Q(x)$ で割り切れるので,

$$(ax+b)^2 \text{ が 2次式 } Q(x) \text{ で割り切れる}$$

がわかる。

$$(ax+b)^2 = C \cdot Q(x) \quad (\text{ただし, } C \text{ は定数})$$

と表わす。ここで, $C=0$ と仮定すると, $a=b=0$ となり, ①に矛盾する。したがって,

$C \neq 0$ であり,

$$Q(x) = \frac{1}{C} (ax+b)^2 \quad \text{--- ②}$$

①と②が 2次式より

$$a \neq 0$$

であり,

$$Q(x)=0 \text{ は 重解 } x = -\frac{b}{a} \text{ をもつ} \quad \blacksquare$$

<解2>

$Q(x)$ は 2次式より,

$$Q(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) \quad (a \neq 0) \quad \text{--- ①}$$

と表わす。 $\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるので,

$$\{P(x)\}^2 = a(x-\alpha)(x-\beta) \cdot R(x)$$

と表わす,

$$\{P(\alpha)\}^2 = 0, \quad \{P(\beta)\}^2 = 0$$

がわかる。

$$P(\alpha) = 0, \quad P(\beta) = 0 \quad \text{--- ②}$$

ここで, $\alpha \neq \beta$ と仮定すると, ②と因数定理より,

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \cdot S(x)$$

と表わす。①を用いて

$$P(x) = Q(x) \cdot \frac{1}{a} S(x)$$

となり, $P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れないという条件と矛盾する。

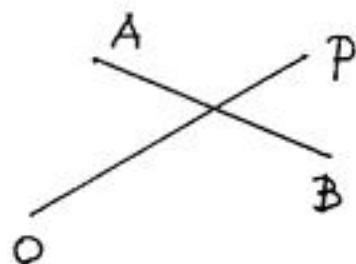
よって, 仮定 $\alpha \neq \beta$ が誤りであり, $\alpha = \beta$ を得る。 $\blacksquare$

2

線分 OP 上の点を X , 線分 AB 上の点を Y とすると,

$$\begin{cases} \vec{OX} = x \vec{OP} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{cases} \vec{OY} = \vec{OA} + y \vec{AB} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{--- ②}$$



と表わす。 $z = \vec{c}$, $X = Y$ とすると,

$$x \vec{OP} = \vec{OA} + y \vec{AB} \quad \text{--- ③}$$

よって, 「①②③を同時に満たす x, y, z が存在する」---(*) ことを示せばよい。

よって,

$$\begin{cases} \text{③} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5+t) = 2y & \text{--- ④} \\ x(9+2t) = 1+2y & \text{--- ⑤} \\ x(5+3t) = 2-2y & \text{--- ⑥} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{④} \times 2 - \text{⑤} \text{ より } x = -1 + 2y \\ \text{④} \times 3 - \text{⑥} \text{ より } 10x = -2 + 8y \end{cases}$$

$$\text{よって } x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって ④ から } t = -1$$

よって, (*) が示された。 ■

$$\text{よって } x \vec{OP} = \frac{1}{3} (4, 7, 2) \text{ より, 交点の座標は } \underline{\underline{(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3})}} \text{ --- 答}$$

[3]

$x \leq 0$ の場合

$$f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (a \neq 0)$$

と仮定し、さらに、 $f(0) = 0$ とし、

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{から} \quad a = -1$$

したがって、

$$f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \quad \text{すなわち、} \quad f(x) = -x^2 - x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x \geq 0$ の場合

$y = f(x)$ のグラフは 図 5 のようになる、と仮定し、

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad \text{すなわち、} \quad f(x) = x^2 - x$$

と仮定し、点 $(-1, f(-1))$ に接する接線を l とすると、と仮定し、

$$l: y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$$

したがって、 $l: y = x + 1$

l と $y = f(x)$ ($x \geq 0$) の交点 Q の座標は、

$$x + 1 = x^2 - x$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

より、 $x = 1 + \sqrt{2}$ と得る。

よって、求める面積を S とすると、図 5、

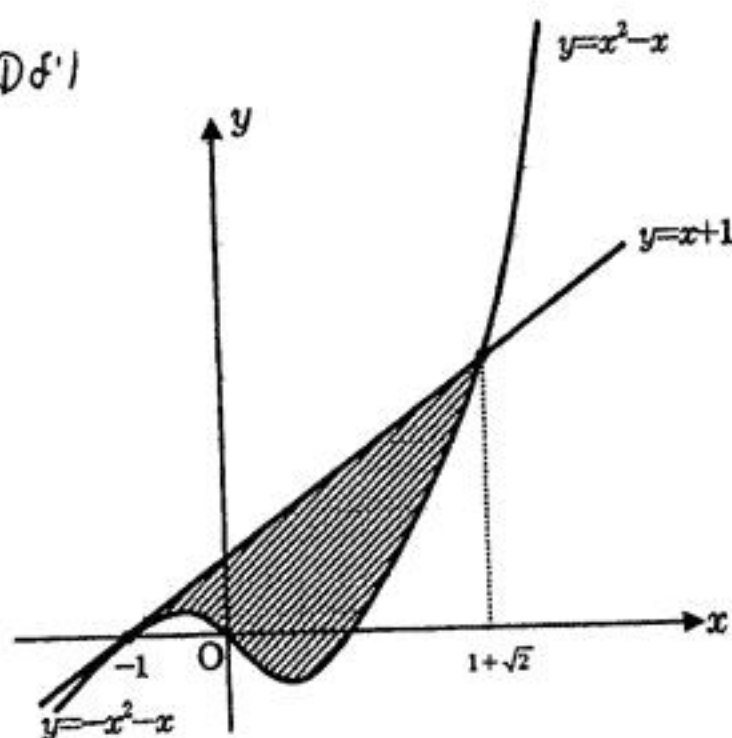
$$S = \int_{-1}^0 \{(x+1) - (-x^2-x)\} dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \{(x+1) - (x^2-x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} (-x^2 + 2x + 1) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \{-(x-1)^2 + 2\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}(x-1)^3 + 2x \right]_0^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}}} \quad \cdots \textcircled{2}$$



4

$n=2$ のとき $n^2+2=6$ であり、 n^2+2 は素数でない。したがって $n \geq 3$ を考える。

n は、3 で割った余りを用いて場合分けして考える。 k を自然数として

(i) $n=3k$ のとき

(ii) $n=3k+1$ のとき

(iii) $n=3k+2$ のとき

に場合分け可い。

(i) のとき $\left(\begin{array}{l} k=1 \text{ のとき } (n, n^2+2) = (3, 11) \text{ あり。 } n, n^2+2 \text{ はともに素数である。} \\ k \geq 2 \text{ のとき } n \text{ は素数でない} \end{array} \right.$

(ii) のとき
$$\begin{aligned} n^2+2 &= (3k+1)^2+2 \\ &= 3(3k^2+2k+1) \end{aligned}$$

よって、 $3k^2+2k+1 \geq 3+2+1=6$
よって、 n^2+2 は素数でない

(iii) のとき
$$\begin{aligned} n^2+2 &= (3k+2)^2+2 \\ &= 3(3k^2+4k+2) \end{aligned}$$

よって、 $3k^2+4k+2 \geq 3+4+2=9$
よって、 n^2+2 は素数でない

以上より、 n, n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限る。

5

$\triangle PQR$ の重心を G とすると

$$\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AP} + \vec{AQ} + \vec{AR})$$

であり,

$$\begin{cases} \vec{AP} = p\vec{AB}, \vec{AQ} = \vec{AB} + q\vec{BC}, \vec{AR} = r\vec{AC} \\ 0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1 \end{cases}$$

とかける。よって,

$$\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + p\left(\frac{1}{3}\vec{AB}\right) + r\left(\frac{1}{3}\vec{AC}\right) + q\left(\frac{1}{3}\vec{BC}\right)$$

ここで, 3辺 AB, AC, BC に 3等分する点と右図

のように定め, D_1F_2 と E_1F_1 の交点を G_0 とする。

$$\frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{AD_1}, \frac{1}{3}\vec{AC} = \vec{AE_1}, \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{D_1E_1}$$

であり,

$$\vec{AG} = (\vec{AD_1} + p\vec{AD_1} + r\vec{AE_1}) + q\vec{D_1E_1}$$

よって, $p\vec{AD_1} + r\vec{AE_1} = \vec{AS}$ とおくと, $0 < p < 1, 0 < r < 1$ より,

S の動く範囲は, 平行四辺形 AD_1 と E_1 の内部 (以下, M) である。

よって $\vec{AD_1} + p\vec{AD_1} + r\vec{AE_1} = \vec{AD_1} + \vec{AS} = \vec{AT}$ とおくと,

T の動く範囲は, 範囲 M を $\vec{AD_1}$ だけ平行移動した平行四辺形, $D_1D_2F_1$ と E_1 の内部 (以下, N) である。

よって, $\vec{AG} = \vec{AT} + q\vec{D_1E_1}$ であり, q は固定される。

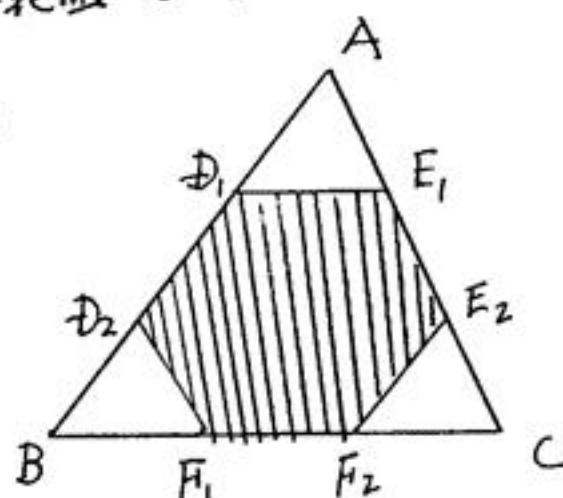
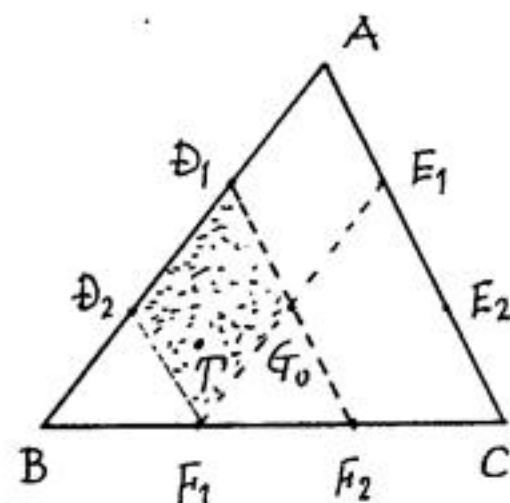
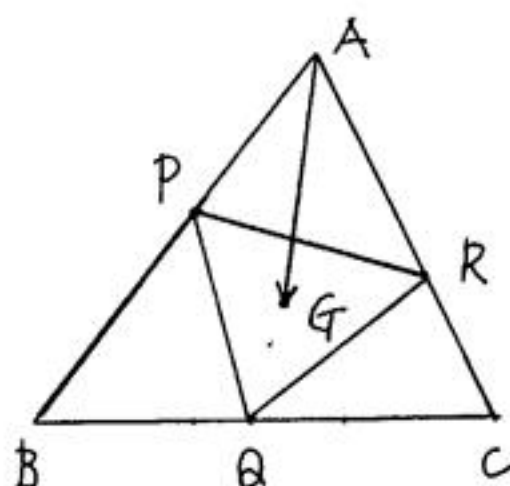
G の動く範囲は, 範囲 N を $q\vec{D_1E_1}$ だけ平行移動した範囲である。

よって, q は $0 < q < 1$ で動く場合は, 求める範囲は,

三角形 $D_1D_2F_1F_2E_2E_1$ の内部

であり, 図示すると,

右図の斜線部分 (境界は除く) である。



6

$$F(\theta) = \int_0^\theta x \cos(x+\alpha) dx \text{ (1)}, \quad F'(\theta) = \theta \cos(\theta+\alpha)$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ (1)} \quad \alpha \leq \theta + \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$$

すなわち、 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ なる定数。

よって、増減表は以下のようになる。

θ	0	----	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	----	$\frac{\pi}{2}$
$F'(\theta)$		+	0	-	
$F(\theta)$		↗		↘	

ゆえに、最大値は $F(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ であり、部分積分法を用いて、

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} x \cos(x+\alpha) dx \\
 &= \left[x \sin(x+\alpha) \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \sin(x+\alpha) dx \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \left[\cos(x+\alpha) \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \\
 &= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \alpha - \cos \alpha}} \quad \text{--- (2)}
 \end{aligned}$$

