

問1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$, ハミルトン-ケリー-の定理を用いて.

$$A^2 - (2-1)A + \{2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1)\}E = 0$$

$$A^2 = A - 2E \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ を用いて, } A^3 = A^2 A = (A - 2E)A = A^2 - 2A = (A - 2E) - 2A = -A - 2E$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (A - 2E)^2 = A^2 - 4A + 4E = (A - 2E) - 4A + 4E = -3A + 2E$$

$$A^6 = (A^3)^2 = (-A - 2E)^2 = A^2 + 4A + 4E = (A - 2E) + 4A + 4E = 5A + 2E$$

$$\text{よって, } A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E$$

$$= (5A + 2E) + 2(-3A + 2E) + 2(-A - 2E) + 2(A - 2E) + 2A + 3E$$

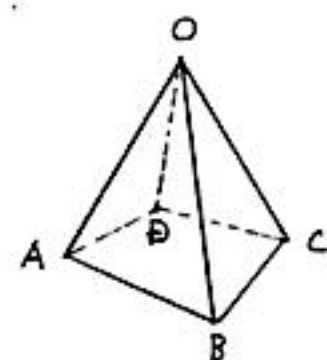
$$= A + E$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}} \quad \cdots \text{---} (\text{答})$$

問2. n 秒後に点 P が点 O にある確率を p_n とする.

A, B, C, D の4つは対称性があるから,

(n 秒後に点 P が点 A, B, C, D のどれかにある確率は等しく, p_n を用いると, $\frac{1}{4}(1-p_n)$ である.) $\cdots \text{---} \textcircled{1}$



$n+1$ 秒後に点 P が点 O にある事象は 辺の $(i) \sim (iv)$ にそれぞれ等しく移動した場合である

(i) n 秒後に点 A にあり, 辺に点 O へ

(ii) n 秒後に点 B にあり, 辺に点 O へ

(iii) n 秒後に点 C にあり, 辺に点 O へ

(iv) n 秒後に点 D にあり, 辺に点 O へ

$\textcircled{1}$ と条件より, $(i) \sim (iv)$ の確率は等しく, $\frac{1}{4}(1-p_n) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}(1-p_n)$

$$\text{よって, } p_{n+1} = \frac{1}{12}(1-p_n) \times 4$$

$$p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

$$\text{変形して, } p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{よって, } p_n - \frac{1}{4} = \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\because \text{よって } p_1 = 0$$

$$\therefore \text{したがって } p_n = \underline{\underline{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}}} \quad \cdots \text{---} (\text{答})$$

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2) \cdots \textcircled{1}$$

$$y' = 3x^2 - 4x - 1$$

$$\Rightarrow \text{2° } y' = 0 \text{ とおくと } 3x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

増減は次の通り。

x	α	β	$(\text{ただし } \alpha = \frac{2-\sqrt{7}}{3}, \beta = \frac{2+\sqrt{7}}{3})$		
y	+	0	-	0	+
y'	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

また、②の方程式は $y-0 = (3-4-1)(x-1) \Leftrightarrow y = -2x+2$ であり

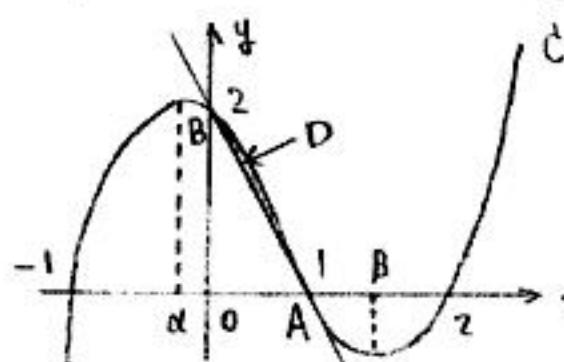
3次関数のグラフと②の交点のx座標は

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = -2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \quad \text{よって } x = 0, 1$$

②とx軸との交点のx座標は①から $x = -1, 1, 2$

以上からグラフは次の通り。



求める立体は斜線部の領域Dの内部および境界をx軸のまわりに1回転したものである。

求める立体の体積を V とおくと

$$V = \int_0^1 \pi (x^3 - 2x^2 - x + 2)^2 dx - \frac{1}{3} \times 2^2 \pi \times 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 \pi (x^3 - 2x^2 - x + 2)^2 dx &= \int_0^1 \pi (x-2)^2 (x+1)^2 (x-1)^2 dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^2 - 4x + 4)(x^2 - 1)^2 dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^2 - 4x + 4)(x^4 - 2x^2 + 1) dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{2}{3} x^6 + \frac{2}{5} x^5 + 2x^4 - \frac{7}{3} x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + 2 - \frac{7}{3} - 2 + 4 \right) \\ &= \frac{54}{35} \pi \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

②③より

$$V = \frac{54}{35} \pi - \frac{4}{3} \pi = \frac{22}{105} \pi \cdots (\text{答})$$

(注意) ②の $\frac{4}{3} \pi$ は $\triangle AOB$ をx軸のまわりに1回転してできる円の体積である。

3

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 & \text{--- ①} \\ ad-bc+p=0 & \text{--- ②} \\ a \geq b \geq c \geq d & \text{--- ③} \end{cases}$$

①より $d = -(a+b+c)$. これを②に代入して

$$-a(a+b+c) - bc + p = 0$$

$$p = a^2 + (b+c)a + bc$$

$$p = (a+b)(a+c) \quad \text{--- ②'}$$

ここで, ③より, $a+b+c+d \leq a+b+a+b$

これを①より $0 \leq a+b+a+b$, したがって, $a+b \geq 0$ --- ④

さらに, ③より $a+b \geq a+c$ --- ⑤

②'④⑤より p は素数より,

$$\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \end{cases} \quad \text{したがって} \quad \begin{cases} b=p-a \\ c=1-a \end{cases} \quad \text{--- ⑥}$$

⑥を③に代入して

$$d = a - p - 1 \quad \text{--- ⑦}$$

⑥⑦を③に代入して

$$a \geq p-a \geq 1-a \geq a-p-1 \iff \begin{cases} 2a \geq p \\ p+2 \geq 2a \end{cases} \iff \frac{p}{2} \leq a \leq \frac{p}{2} + 1$$

ここで, p は素数より, p は奇数

よって, $a = \frac{p}{2} + \frac{1}{2}$ --- ⑧

⑥⑦⑧より,

$$\underline{a = \frac{p+1}{2}, \quad b = \frac{p-1}{2}, \quad c = \frac{1-p}{2}, \quad d = -\frac{p+1}{2} \quad \text{--- (答)}}$$

文系 4

Pがℓ上より

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+s \\ 4+s \\ s \end{pmatrix} \quad (s: \text{実数})$$

Qがm上より

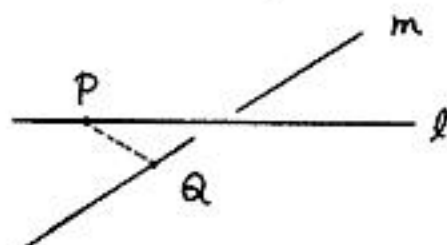
$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1-2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t: \text{実数})$$

とせよ。LKから、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \{(3+s)-(2+t)\}^2 + \{(4+s)-(-1-2t)\}^2 + s^2 \\ &= (s-t+1)^2 + (s+2t+5)^2 + s^2 \\ &= 3s^2 + 5t^2 + 2st + 12s + 18t + 26 \\ &= 3s^2 + 2(t+6)s + (5t^2 + 18t + 26) \\ &= 3\left\{s + \frac{1}{3}(t+6)\right\}^2 - \frac{1}{3}(t+6)^2 + (5t^2 + 18t + 26) \\ &= 3\left\{s + \frac{1}{3}(t+6)\right\}^2 + \frac{14}{3}(t^2 + 3t + 3) \\ &= 3\left\{s + \frac{1}{3}(t+6)\right\}^2 + \frac{14}{3}\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

よって、 $s + \frac{1}{3}(t+6) = 0$ かつ $t + \frac{3}{2} = 0$ 、より、 $s = t = -\frac{3}{2}$ とき、

$$PQ \text{ の長さは最小となり、その値は } \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \quad \cdots (答)$$



命題 p は正しくない。

[理由] 「 $\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ が共に有理数となる n が存在する」... (*) と仮定する。

この n に対し

$\sqrt{n}, \sqrt{n+1}$ は共に自然数である... (*)' 後部 (注意) 参照 n = 1

$$\text{このとき } (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1 \quad (\sqrt{n}, \sqrt{n+1} > 1 \text{ 故})$$

よって $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1$ となるが、これは異なる自然数 $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}$ は存在しない。

従って 仮定 (*), つまり 仮定 (*)' が誤りであり、命題 p は正しくない。

(注意) 「 $\sqrt{n}$ が有理数 $\Leftrightarrow \sqrt{n}$ は自然数」... ☆ について

$\sqrt{n} = \frac{b}{a}$ (a, b は互いに素な自然数) と表せる。

$a \geq 2$ と仮定する。

$$\sqrt{n} = \frac{b}{a} \text{ より } a^2 n = b^2 \dots \textcircled{1}$$

a, b は互いに素であるから a^2, b^2 も互いに素であり、 n は b^2 で割り切れる。

つまりある自然数 k を用いて

$$n = k b^2 \dots \textcircled{2} \text{ と表せる。}$$

$$\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \text{ を代入して } a^2 \cdot k b^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 k = 1$$

これは $a \geq 2$ に矛盾。従って $a = 1$ であり、☆ が示せた。

命題 q は正しい。

[証明] 「 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ が有理数となる n が存在する」... (**) と仮定する。

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = x \dots \textcircled{3} \quad (x \text{ は有理数}) \text{ と表せば}$$

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{1}{x} \dots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \text{従って } (\textcircled{4} + \textcircled{3}) \div 2 \text{ から } \sqrt{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + x \right) \\ (\textcircled{4} - \textcircled{3}) \div 2 \text{ から } \sqrt{n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right) \end{aligned} \quad \text{となり、} \sqrt{n+1}, \sqrt{n} \text{ は共に有理数。}$$

よって、これは命題 q であり、正しい。

従って、仮定 (**) が誤りであり、

「 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ が有理数となる n は存在しない」

つまり、q が正しいことが示せた。

