

①

解1. $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx = 1$ とおく. $I = \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \dots \textcircled{1}$

ここで, $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \left[2(x^2+4)^{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = 2\sqrt{8} - 2\sqrt{4} = 4(\sqrt{2}-1) \dots \textcircled{2}$

$J = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ とおく. $x = 2 \tan \theta$ と置換する.

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}$ より $dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$

積分範囲から

x	$0 \rightarrow 2$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{4(\tan^2 \theta + 1)}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}}} = \frac{\cos \theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ より } \cos \theta > 0)$

よって $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{2} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta$

$\sin \theta = t$ と置換すると

$\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ より, $\cos \theta d\theta = dt$.

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって, $J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt$
 $= \frac{1}{2} [\log|1+t| - \log|1-t|]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$
 $= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$
 $= \frac{1}{2} \log (\sqrt{2}+1)^2$
 $= \log (\sqrt{2}+1) \dots \textcircled{3}$

①②③より, $I = 4(\sqrt{2}-1) + \log(\sqrt{2}+1) \dots \text{答}$

問2. 「1歩で1段昇る」をA, 「1歩で2段昇る」をBとし, Aがm回, Bがn回とすると,

$m+2n=15 \quad (m \geq 0, n \geq 0)$

$n \leq 7$ であるから, $n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ のとき, 1歩で2段昇る:を連続する数を,

$n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

の11パターンあり, n, m の組合せは, 以下表の通り ①~⑥の通りである.

	n	m
①	0	15
②	1	13
③	2	11
④	3	9
⑤	4	7
⑥	5	5

例えば ④ について考える. Aが9回, Bが3回である.

9個のAと3個のBを1列に並べるとき, Bが連続しない並べ方の総数を求める.

まず, Aを9個並べ, 下の図の10個の↑のうちから3個を取り出し, 各↑にBを1つ入れる. 求める並べ方は ${}_{10}C_3 = 120$ (通り)

↑ A ↑ A ↑ A ↑ A ↑ A ↑ A ↑ A ↑ A ↑ A ↑

①以外については同様にして

②: ${}_{14}C_1 = 14$ ③: ${}_{12}C_2 = 66$ ⑤: ${}_{8}C_4 = 70$ ⑥: ${}_{6}C_5 = 6$

また ①: 1

よって, $1 + 14 + 66 + 120 + 70 + 6 = 277$ であり, 277通り ... 答

2

$$x > 0, y > 0, x \neq y \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = x a_n + y^{n+1} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ の両辺を } y^{n+1} \text{ で割ると, } \frac{a_{n+1}}{y^{n+1}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{a_n}{y^n} + 1$$

$$\therefore \text{置. } \frac{a_n}{y^n} = b_n \text{ とおく. } b_{n+1} = \frac{x}{y} b_n + 1 \cdots \textcircled{2}'$$

①より $y - x \neq 0$ と仮定する. $\textcircled{2}'$ は $(2a)$ の変形である.

$$b_{n+1} - \frac{y}{y-x} = \frac{x}{y} (b_n - \frac{y}{y-x})$$

$$\therefore \text{よって, } b_n - \frac{y}{y-x} = (b_1 - \frac{y}{y-x}) \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\therefore \text{よって, } a_1 = 0 \text{ より, } b_1 = \frac{a_1}{y} = 0$$

$$\therefore \text{よって, } b_n = \frac{y}{y-x} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} \right\}$$

$$a_n = b_n y^n = \frac{y}{y-x} (y^n - x^{n-1} y) = \frac{y^2}{y-x} (y^{n-1} - x^{n-1})$$

①より, (i) $y > x > 0$ のとき, (ii) $x > y > 0$ のとき, の場合分けが必要.

(i) の場合

$$y^{n-1} - x^{n-1} = y^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} \right\} \text{ と表す.}$$

$$y > x > 0 \text{ より, } 0 < \frac{x}{y} < 1. \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} = 0$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が収束する条件は, $\lim_{n \rightarrow \infty} y^{n-1}$ が収束する条件である.

$$y > 0 \text{ と同じく, 条件は } 0 < y \leq 1$$

(ii) の場合

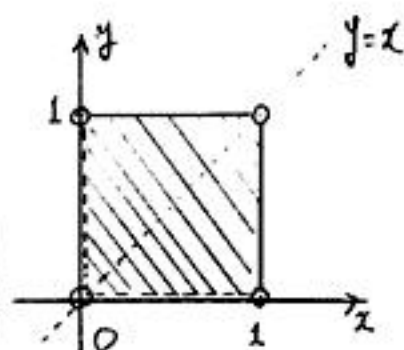
$$y^{n-1} - x^{n-1} = x^{n-1} \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} - 1 \right\}$$

$$\therefore \text{よって, (i) と同様にして, 条件は } 0 < x \leq 1$$

以上 (i) (ii) より,

求める範囲は, 図の斜線部分

(ただし, $y=1$ の $0 < x < 1$ の部分と, $x=1$ の $0 < y < 1$ の部分)
 含み, $y=x$, x 軸, y 軸は含まない.



3

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 & \cdots \textcircled{1} \\ ad-bc+p=0 & \cdots \textcircled{2} \\ a \geq b \geq c \geq d & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①より $d = -(a+b+c)$. これを②に代入して

$$-a(a+b+c) - bc + p = 0$$

$$p = a^2 + (b+c)a + bc$$

$$p = (a+b)(a+c) \quad \cdots \textcircled{2'}$$

これから, ③より, $a+b+c+d \leq a+b+a+b$

これを①より $0 \leq a+b+a+b$, したがって, $a+b \geq 0 \quad \cdots \textcircled{4}$

さらに, ③より $a+b \geq a+c \quad \cdots \textcircled{5}$

②'④⑤より p は素数より,

$$\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \end{cases} \quad \text{したがって} \quad \begin{cases} b=p-a \\ c=1-a \end{cases} \quad \cdots \textcircled{6}$$

⑥を①に代入して

$$d = a - p - 1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑥⑦を③に代入して

$$a \geq p-a \geq 1-a \geq a-p-1 \iff \begin{cases} 2a \geq p \\ p+2 \geq 2a \end{cases} \iff \frac{p}{2} \leq a \leq \frac{p}{2} + 1$$

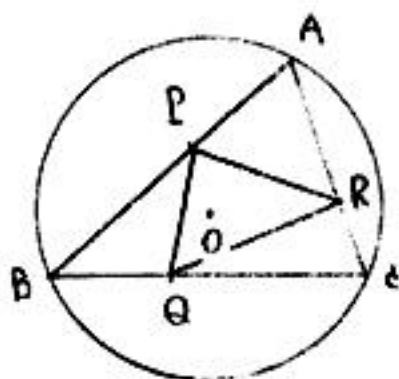
よって, p は3以上の素数より, p は奇数

$$\text{よって, } a = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑥⑦⑧より,

$$a = \frac{p+1}{2}, \quad b = \frac{p-1}{2}, \quad c = \frac{1-p}{2}, \quad d = -\frac{p+1}{2} \quad \cdots (\text{答})$$

4



$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \in \mathbb{R}^3.$$

さらに $P \in \triangle ABC$ かつ $P \in \text{線分 } BC$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 P, Q, R について 2 条件から

$$\vec{OP} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}, \vec{OQ} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}, \vec{OR} = \frac{3\vec{c} + 2\vec{a}}{5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

O が $\triangle PQR$ の外心 故

$$|\vec{OP}|^2 = |\vec{OQ}|^2 = |\vec{OR}|^2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} \right|^2 = \left| \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5} \right|^2 = \left| \frac{3\vec{c} + 2\vec{a}}{5} \right|^2 \quad (\textcircled{2} \text{ を用いて})$$

$$\Leftrightarrow 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{b} \cdot \vec{c} + 4|\vec{c}|^2 = 9|\vec{c}|^2 + 12\vec{c} \cdot \vec{a} + 4|\vec{a}|^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\therefore$

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = 2r^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{同様にして } |\vec{BC}|^2 = 2r^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}, \quad |\vec{CA}|^2 = 2r^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$\textcircled{3} \text{ から } |\vec{AB}|^2 = |\vec{BC}|^2 = |\vec{CA}|^2 \text{ となり } AB = BC = CA \text{ となり,}$$

$\triangle ABC$ は正三角形 $\cdots$ (答)

5

$\vec{x}_{n+1} = A \vec{x}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) より, $\vec{x}_m = A^m \vec{x}_0$. したがって $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ より,

$$A^m \vec{x}_0 = \vec{x}_0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

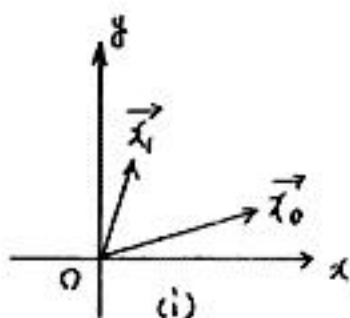
①より,

$$A \cdot A^m \vec{x}_0 = A \vec{x}_0$$

$$A^m \cdot A \vec{x}_0 = A \vec{x}_0$$

したがって,

$$A^m \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \quad \cdots \textcircled{2}$$



(i) $\vec{x}_1 \neq k \vec{x}_0$ (k : 実数) あり

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ とおく. } \vec{x}_1 \neq k \vec{x}_0 \text{ より, } ad - bc \neq 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①②より,

$$A^m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \text{ を掛けると,}$$

$$A^m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{したがって, } A^m = E \quad (\text{ただし, } E: \text{単位行列})$$

(ii) $\vec{x}_1 = k \vec{x}_0$ あり

$$\vec{x}_1 = A \vec{x}_0 \text{ と } \vec{x}_1 = k \vec{x}_0 \text{ より } A \vec{x}_0 = k \vec{x}_0$$

$$\text{したがって, } A^m \vec{x}_0 = k^m \vec{x}_0$$

$$\text{したがって ① より } \vec{x}_0 = k^m \vec{x}_0$$

$$(k^m - 1) \vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{x}_0 \neq 0 \text{ より } k^m - 1 = 0$$

$$\text{したがって, } k = 1 \text{ または } k = -1$$

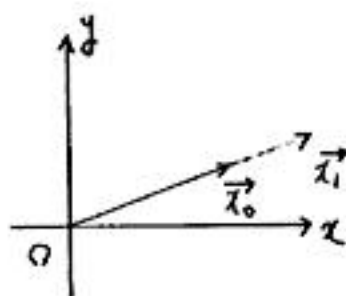
$$\text{いづれにしても } \vec{x}_2 = A \cdot A \vec{x}_0 = A(k \vec{x}_0) = k A \vec{x}_0 = k^2 \vec{x}_0 \text{ より,}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_0$$

したがって, 3以上の自然数 m を満たす $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ あり得る。

したがって (ii) あり得る。

以上より, A^m は単位行列 である。



$$[6] \quad f(0) = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad f'(0) = 1 \cdots \textcircled{2}$$

任意の実数 a, b に対し

$$\begin{cases} 1 + f(a)f(b) \neq 0 \cdots \textcircled{3} \\ f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} \cdots \textcircled{4} \end{cases} \quad \text{が成立。}$$

(1) ④に $b = -a$ を代入し

$$f(0) = \frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)}$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(a) + f(-a) \quad (\textcircled{1} \textcircled{3} \text{より})$$

$$\Leftrightarrow f(-a) = -f(a) \cdots \textcircled{5}$$

③と $b = -a$ を代入し、⑤を用い

$$1 + f(a)f(-a) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - \{f(a)\}^2 \neq 0 \Leftrightarrow f(a) \neq \pm 1 \cdots \textcircled{6}$$

∴ 再び ④に $a = b = \frac{a'}{2}$ (a' は実数) を代入し

$$f(a') = \frac{f(\frac{a'}{2}) + f(\frac{a'}{2})}{1 + \{f(\frac{a'}{2})\}^2} = \frac{2f(\frac{a'}{2})}{1 + \{f(\frac{a'}{2})\}^2}$$

$$\text{よって } 1 - f(a') = 1 - \frac{2f(\frac{a'}{2})}{1 + \{f(\frac{a'}{2})\}^2} = \frac{\{1 - f(\frac{a'}{2})\}^2}{1 + \{f(\frac{a'}{2})\}^2}$$

∴ ⑥より等号不成立。

$$f(a') - (-1) = \frac{\{f(\frac{a'}{2}) + 1\}^2}{1 + \{f(\frac{a'}{2})\}^2} \geq 0 \quad \text{と同様：⑥から等号不成立。}$$

従って $-1 < f(a') < 1$ が任意の実数 a' に対して成立。つまり問題が示す。 $\blacksquare$

[別解] (⑥まで示した後)

「 $f(t) > 1$ となる実数 t が存在する」… (*) と仮定する。($t=0$ は明らか)

$f(a)$ は連続関数であり、かつ

$f(0) = 0, \quad f(t) > 1$ であるから、中間値の定理より

$t > 0 \Rightarrow f(c) = 1$ かつ $0 < c < t$ とみえる c が存在

$t < 0 \Rightarrow f(c) = 1$ かつ $t < c < 0$ とみえる c が存在

これは ⑥に矛盾。従って (*) が誤りであり、⑤と併せて $-1 < f(a) < 1$ が成立。

また、 $-1 < f(a)$ も同様に示せる。 $\blacksquare$

(2) ④において b を定数と見て、 a に関して微分すると

$$\begin{aligned} f'(a+b) &= \frac{f'(a) \{1 + f(a)f(b)\} - \{f(a) + f(b)\} f'(a)f(b)}{\{1 + f(a)f(b)\}^2} \\ &= \frac{f'(a) [1 - \{f(b)\}^2]}{\{1 + f(a)f(b)\}^2} \end{aligned}$$

∴ $b = -a$ とし、さらに ⑤を用い

$$f'(0) = \frac{f'(a) [1 - \{f(a)\}^2]}{\{1 - \{f(a)\}^2\}^2} = \frac{f'(a)}{1 - \{f(a)\}^2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } f'(a) = 1 - \{f(a)\}^2 > 0 \cdots \star \quad (\text{1) の結果より})$$

$\star$ の等号の両辺を a で微分して

$$f''(a) = -2f(a)f'(a) \cdots \star'$$

∴ $\star$ より $f'(a) > 0$ から $f(a)$ は単調増加かつ、①から $f(0) = 0$ であるから

$a > 0$ ならば $f(a) > 0$ である。

従って $\star, \star'$ から $a > 0$ ならば $f''(a) < 0$ 、つまり $y = f(x)$ のグラフは $x > 0$ 上に凸。