

(甲)

1

問 1.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に、ハミルトン・ケーリーの定理を用いて、

$$A^2 - (2-1)A + \{2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1)\}E = O$$

$$A^2 = A - 2E \quad \dots \textcircled{1}$$

①を用いて、

$$A^3 = A^2 A = (A - 2E)A = A^2 - 2A = (A - 2E) - 2A = -A - 2E$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (A - 2E)^2 = A^2 - 4A + 4E = (A - 2E) - 4A + 4E = -3A + 2E$$

$$A^6 = (A^3)^2 = (-A - 2E)^2 = A^2 + 4A + 4E = (A - 2E) + 4A + 4E = 5A + 2E$$

よって、

$$\begin{aligned} & A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E \\ &= (5A + 2E) + 2(-3A + 2E) + 2(-A - 2E) + 2(A - 2E) + 2A + 3E \\ &= A + E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}} \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

問 2.

1 回目、2 回目、3 回目の得点をそれぞれ x, y, z とする。組 (x, y, z) の総数を N とすると、

$$N = n^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

題意は

$$1 \leq x \leq y \leq z \leq n \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たすものである。 x, y, z は整数より、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 1 \leq x < y+1 < z+2 \leq n+2 \quad \dots \textcircled{2}'$$

であるので、 $\textcircled{2}'$ を満たす組 $(x, y+1, z+2)$ の数を求めればよく、これは、1 から $n+2$ までの整数から異なる 3 つの整数の取り出し方に等しく、

$${}_{n+2}C_3 \quad \dots \textcircled{2}''$$

①②''より、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_{n+2}C_3}{n^3} &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} \\ &= \underline{\underline{\frac{(n+1)(n+2)}{6n^2}}} \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

2

$$x > 0, y > 0, x \neq y \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

②の両辺を y^{n+1} で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{y^{n+1}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{a_n}{y^n} + 1$$

ここで,

$$\frac{a_n}{y^n} = b_n$$

とおくと,

$$b_{n+1} = \frac{x}{y} b_n + 1 \quad \dots \textcircled{2}'$$

①より $y-x \neq 0$ であるので, ②'は次のように変形できる。

$$b_{n+1} - \frac{y}{y-x} = \frac{x}{y} \left(b_n - \frac{y}{y-x} \right)$$

よって,

$$b_n - \frac{y}{y-x} = \left(b_1 - \frac{y}{y-x} \right) \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

ここで, $a_1 = 0$ より,

$$b_1 = \frac{a_1}{y} = 0$$

したがって

$$b_n = \frac{y}{y-x} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} \right\}$$

$$a_n = b_n y^n = \frac{y}{y-x} (y^n - x^{n-1} y) = \frac{y^2}{y-x} (y^{n-1} - x^{n-1})$$

①より,

「(i) $y > x > 0$ のとき (ii) $x > y > 0$ のとき」

に場合分けできて,

(i)について

$$y^{n-1} - x^{n-1} = y^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} \right\}$$

であり, $y > x > 0$ より,

$$0 < \frac{x}{y} < 1$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} = 0$$

したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が収束する条件は, $\lim_{n \rightarrow \infty} y^{n-1}$ が収束する条件である。 $y > 0$ を用いて,

条件は

$$0 < y \leq 1$$

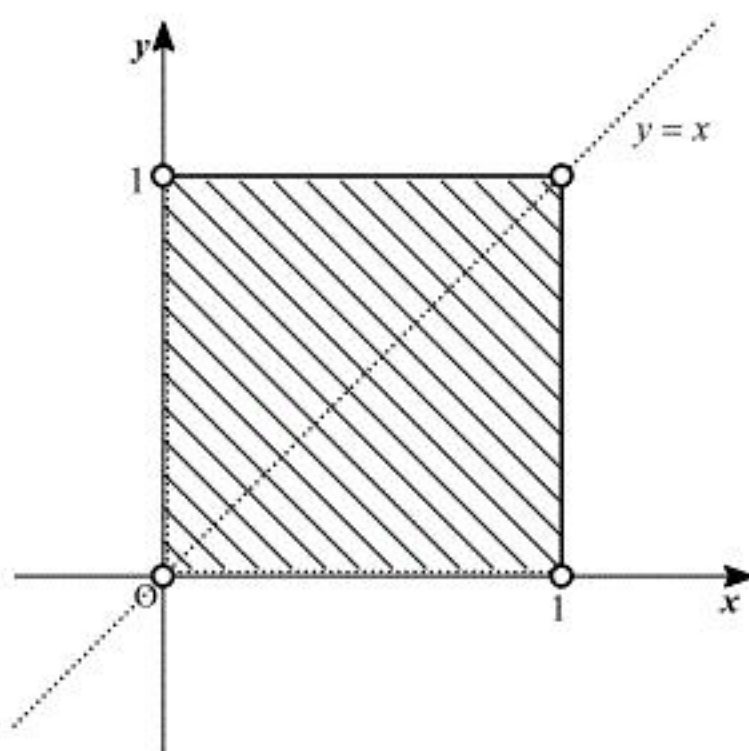
(ii)について

$$y^{n-1} - x^{n-1} = x^{n-1} \left\{ \left(\frac{y}{x} \right)^{n-1} - 1 \right\}$$

以下(i)と同様にして, 条件は

$$0 < x \leq 1$$

以上(i)(ii)より, 求める範囲は図の斜線部分。(ただし, $y=1$ の $0 < x < 1$ の部分と, $x=1$ の $0 < y < 1$ の部分は含み, $y=x$, x 軸, y 軸は含まない。)



$$\begin{cases} a+b+c+d=0 & \dots\dots ① \\ ad-bc+p=0 & \dots\dots ② \\ a\geq b\geq c\geq d & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①より

$$d=-(a+b+c)$$

これを②に代入して

$$-a(a+b+c)-bc+p=0$$

$$p=a^2+(b+c)a+bc$$

$$p=(a+b)(a+c) \quad \dots\dots ②'$$

ここに, ③より,

$$a+b+c+d\leq a+b+a+b$$

これと①より

$$0\leq a+b+a+b$$

すなわち,

$$a+b\geq 0 \quad \dots\dots ④$$

さらに, ③より

$$a+b\geq a+c \quad \dots\dots ⑤$$

②'④⑤と p は素数より,

$$\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{cases} b=p-a \\ c=1-a \end{cases} \quad \dots\dots ⑥$$

⑥を①に代入して,

$$d=a-p-1 \quad \dots\dots ⑦$$

⑥⑦を③に代入して,

$$a\geq p-a\geq 1-a\geq a-p-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a\geq p \\ p+2\geq 2a \end{cases}$$

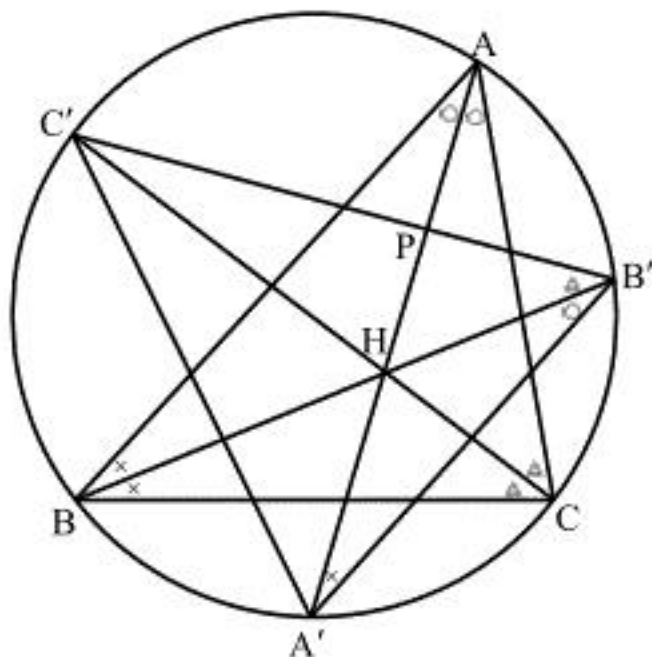
$$\Leftrightarrow \frac{p}{2}\leq a\leq \frac{p}{2}+1$$

ところで, p は 3 以上の素数より, p は奇数。よって,

$$a=\frac{p}{2}+\frac{1}{2} \quad \dots\dots ⑧$$

⑥⑦⑧より,

$$\underline{\underline{a=\frac{p+1}{2}, b=\frac{p-1}{2}, c=\frac{1-p}{2}, d=-\frac{p+1}{2} \quad \dots\dots (\text{答})}}$$



AA' , BB' , CC' は $\triangle ABC$ の内角の 2 等分線であるから、すべて $\triangle ABC$ の内心を通る。

つまり 1 点で交わる・・・☆

$$\begin{cases} \angle BAA' = \angle CAA' (= \alpha \text{ とする}) \\ \angle ABB' = \angle CBB' (= \beta \text{ とする}) \\ \angle ACC' = \angle BCC' (= \gamma \text{ とする}) \end{cases}$$

このとき $\triangle ABC$ の内角和から

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} \angle BB'A' = \angle BAA' = \alpha \text{ (弧 } BA' \text{ に対する円周角)} \\ \angle AA'B' = \angle ABB' = \beta \text{ (弧 } AB' \text{ に対する円周角)} \dots \textcircled{2} \\ \angle BB'C' = \angle BCC' = \gamma \text{ (弧 } BC' \text{ に対する円周角)} \end{cases}$$

よって、 AA' と $B'C'$ の交点を P とし、 $\triangle A'B'P$ において

$$\angle PA'B' + \angle A'B'P = \beta + (\alpha + \gamma) \quad (\textcircled{2} \text{ より})$$

$$= 90^\circ \quad (\textcircled{1} \text{ より})$$

したがって

$$\angle A'PB' = 90^\circ$$

となり、

$$AA' \perp B'C' \quad \dots \textcircled{3}$$

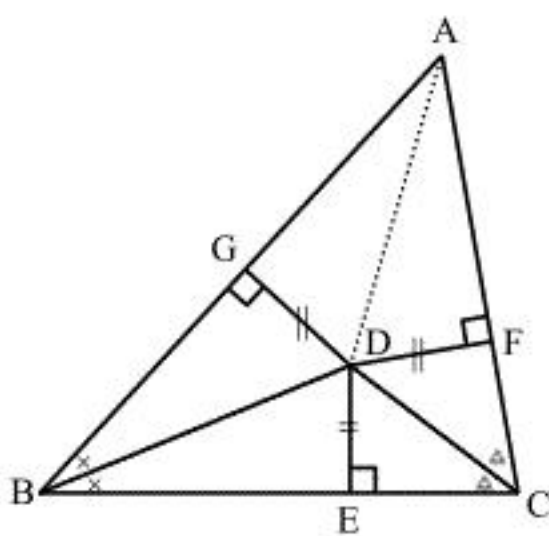
他にも同様にして

$$BB' \perp A'C', CC' \perp A'B' \quad \dots \textcircled{4}$$

以上より H は $\triangle A'B'C'$ の垂心である。 ■

(補足)

☆の証明について



$\angle ABC$, $\angle ACB$ の 2 等分線の交点を D とする。 D から各辺 BC , CA , AB に垂線を下ろし、その足をそれぞれ E , F , G とする。

$$\triangle BDE \equiv \triangle BDG \quad (\text{直角三角形において斜辺と他の 1 鋭角がそれぞれ等しい})$$

同様に

$$\triangle CDE \equiv \triangle CDF$$

したがって

$$DE = DG, DE = DF$$

より

$$DG = DF$$

このことから

$$\triangle ADG \equiv \triangle ADF \quad (\text{直角三角形において斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい})$$

故に

$$\angle DAG = \angle DAF$$

つまり、 AD は $\angle BAC$ の 2 等分線となり、☆が示せた。

5

f, g を表す行列をそれぞれ A, B とし, x 軸についての対称移動を C とすると,

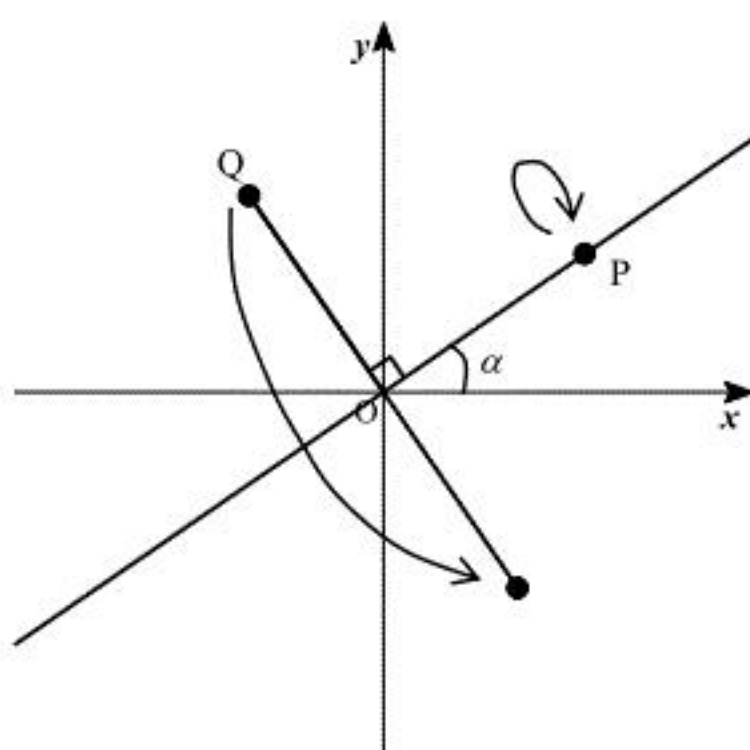
$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり,

$$AB = C \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす α を求めればよい。



B について

$y = (\tan \alpha)x$ を ℓ とし, 点 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 点 $Q(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ とすると点 P は ℓ 上であり,

$$\angle POQ = \frac{\pi}{2}$$

であるので,

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} \\ \Leftrightarrow B &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

①③を②に代入して

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\left[\cos 2\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

が条件。ここに,

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

より

$$-\pi < 2\alpha < \pi$$

よって

$$2\alpha = -\frac{\pi}{3}$$

すなわち

$$\underline{\underline{\alpha = -\frac{\pi}{6}}} \quad \dots \text{(答)}$$

6

$y = xe^{1-x}$ について,

$$y' = e^{1-x} + xe^{1-x} \cdot (-1) = (1-x)e^{1-x}$$

より, 増減表は,

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	1	$\searrow$

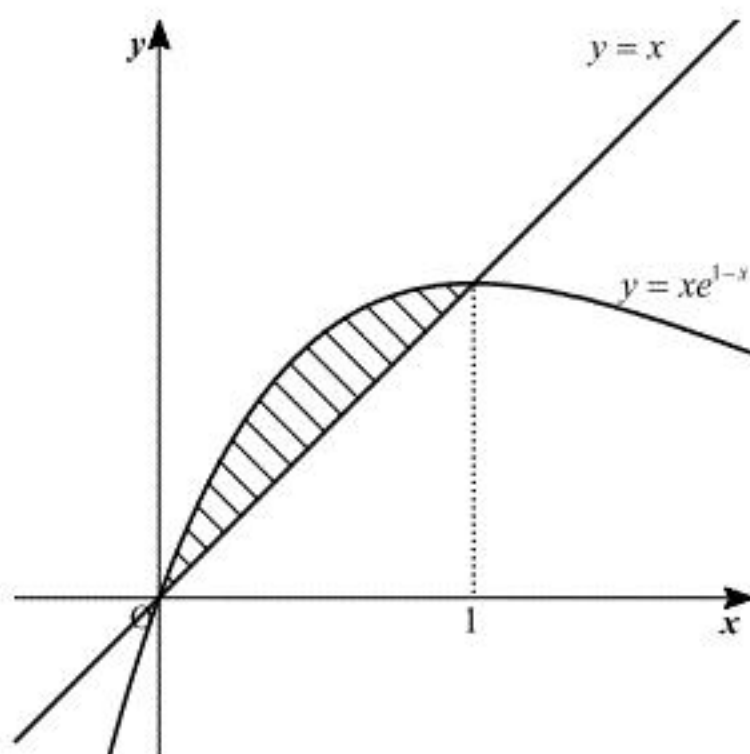
また,

$$xe^{1-x} - x = x(e^{1-x} - 1)$$

より

$$\begin{cases} xe^{1-x} = x \Leftrightarrow x = 0, 1 \\ xe^{1-x} > x \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ xe^{1-x} < x \Leftrightarrow x < 0, 1 < x \end{cases}$$

となる。以上より, $y = xe^{1-x}$, $y = x$ のグラフの概形は図のようになり, 図の斜線部分を x 軸周りに回転した立体の体積を求めればよい。



体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left\{ \pi (xe^{1-x})^2 - \pi x^2 \right\} dx \\ &= \pi e^2 \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx - \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \pi e^2 \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ここで, $I = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$ について, 部分積分法を 2 回用いて,

$$\begin{aligned} I &= \left[x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} + \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{-5e^{-2} + 1}{4} \end{aligned}$$

よって,

$$V = \pi e^2 \frac{-5e^{-2} + 1}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{(3e^2 - 19)\pi}{12} \quad \cdots (\text{答})$$