$\boxed{1}$

$6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx=A$ とおく。

$f(x)=ax^2+bx+c$ より、 $f'(x)=2ax+b$

よって

$$A=\int_{-1}^{1}\{6(ax^2+bx+c)^2-(1-x^2)(2ax+b)^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{10a^2x^4+16abx^3+(-4a^2+12ac+7b^2)x^2+(12bc-4ab)x+(6c^2-b^2)\}dx$$

ところで

$$\begin{cases}\int_{-1}^{1}x^4dx=2\int_{0}^{1}x^4dx=2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{2}{5}\\ \int_{-1}^{1}x^3dx=0\\ \int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_{0}^{1}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\\ \int_{-1}^{1}x\,dx=0\\ \int_{-1}^{1}dx=2\int_{0}^{1}dx=2[x]_0^1=2\end{cases}$$

よって、

$$A=4a^2+\frac{2}{3}(-4a^2+12ac+7b^2)+2(6c^2-b^2)$$

$$=\frac{4}{3}a^2+8ac+12c^2+\frac{8}{3}b^2$$

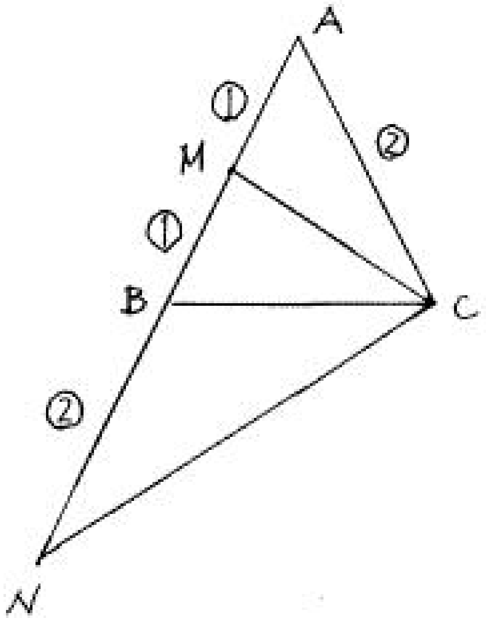
$$=\frac{4}{3}(a+3c)^2+\frac{8}{3}b^2$$

ところで、a,b,cは実数より、$(a+3c)^2\geqq 0$, $b^2\geqq 0$

ゆえに、 $A\geqq 0$

すなわち、 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx\leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ ■

$\boxed{2}$



条件より，A, M, B, N はこの順に一直線上にあり，

$AM : MB : BN = 1 : 1 : 2$ ---①

また，$AB = AC$ ---②

$\triangle AMC$ と $\triangle ACN$ について，

①②より，$AC : AN = 2 : (1+1+2) = 1 : 2$

$AM : AC = 1 : 2$

また，$\angle MAC = \angle CAN$

よって，$\triangle AMC \backsim \triangle ACN$ で，相似比は $1 : 2$

ゆえに，$MC : CN = 1 : 2$ ---③

ここで，$\triangle CMN$ に着目すると，

①③より，$MB : BN = MC : CN$

したがって，$\angle BCM = \angle BCN$ ■

$\boxed{3}$

$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ ---- ①

$\Longleftrightarrow$ $x^2+ax+1=0$ または $3x^2+ax-3=0$

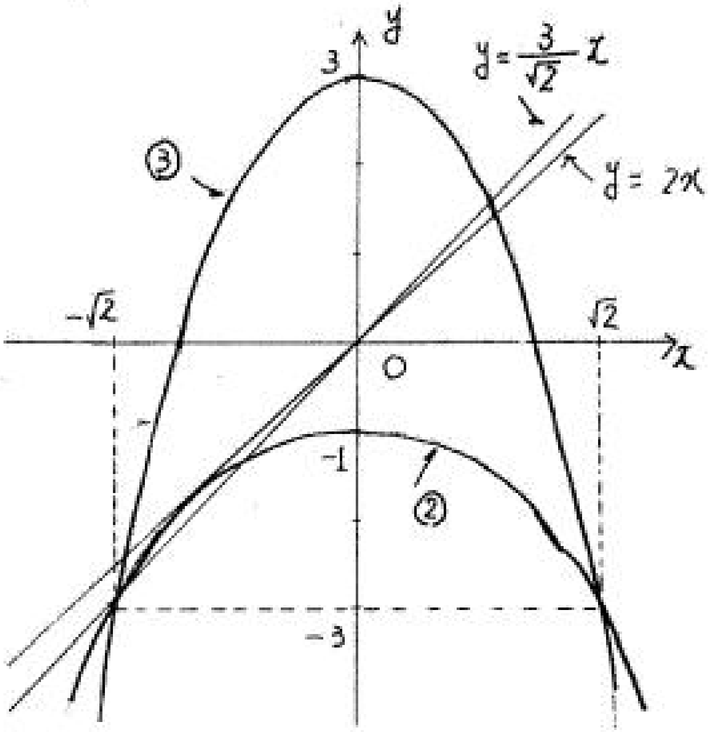
$\Longleftrightarrow$ $-x^2-1=ax$ または $-3x^2+3=ax$

したがって，①を満たす実数 x の個数は，

放物線：$y=-x^2-1$ ---② または 放物線：$y=-3x^2+3$ ----③

と，直線：$y=ax$ ---④ の共有点の個数

に等しい。



(グラフは，x 軸方向に拡大してある)

②と③の共有点は，連立して

$-x^2-1=-3x^2+3 \Leftrightarrow x^2=2$

より，点 $(\pm\sqrt{2},-3)$。したがって，

④が点 $(\pm\sqrt{2},-3)$ を通るときの a は

$\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$ (複号同順)

また，②と④が接するのは，連立して

$-x^2-1=ax \Leftrightarrow x^2+ax+1=0$

より，$a^2-4=0$，すなわち，$a=\pm2$ のときである。

さらに，2つの放物線②と③は y 軸対称であり，直線④は原点を通る傾き a の直線である。

よって，グラフより，

$$\begin{cases} -2<a<2 \text{ のとき，2個} \\ a=\pm2,\ a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ のとき，3個} \\ a<-2,\ a>2\ (\text{ただし，}a\neq\pm\frac{3}{\sqrt{2}}) \text{ のとき，4個} \end{cases}$$ ----(答)

4

$t=\sin x+\cos x$ とおくと、

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x$ より、 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

ゆえに、

$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)$

$=t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)$

以上より、与えられた x の方程式を、t の方程式に直すと、

$2\sqrt{2}\,t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)+3\,\dfrac{t^2-1}{2}=0$

すなわち、 $2\sqrt{2}t^3-3t^2-6\sqrt{2}t+3=0$ ----①

また、 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $0\leqq x<2\pi$ より、

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ ----②

まず、①が ②の範囲に異なる実数解をいくつもつのかを考える。

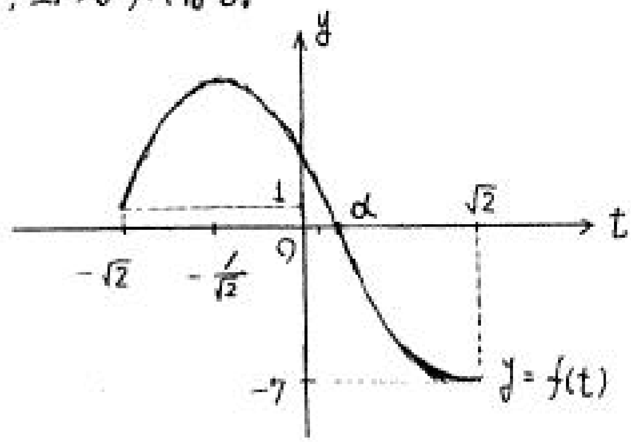
①の左辺を $f(t)$ とおく。

$f(t)=2\sqrt{2}t^3-3t^2-6\sqrt{2}t+3$

$f'(t)=6\sqrt{2}t^2-6t-6\sqrt{2}=6(\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2})=6(\sqrt{2}t+1)(t-\sqrt{2})$

増減表は下のようになり、$y=f(t)$ のグラフは、図のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	----	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	----	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↗		↘	-7



図より、②の範囲における①の解はただ1つで、それを α とすると、

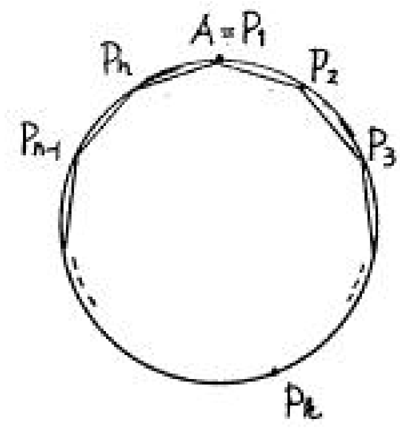
$-\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$

であり、 $\alpha=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $0\leqq x<2\pi$ であるので、

x の個数は、2個 ----(答)

5

(1) aについて



AをP_1とし、正n角形の頂点をP_1から時計回りに

$P_2, P_3, \cdots, P_n$とする。各頂点から隣りの頂点へ進むとき、

時計回りの進み方を $\rightarrow$、反時計回りの進み方を $\Rightarrow$

で表す。また、$P_{n+1}=A$とする。

始点P_1から最初に進む点はP_2とP_nがあるが、図形の

対称性より、$P_1 \rightarrow P_2$の場合の数をxとすると、　$a=2x$ …①

xについて　次の3つの場合に分けることができる。

(i) $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_1$

の順に、時計回りに2周する。

(ii) $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \rightarrow P_1 \Rightarrow P_n \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_1$

の順に、時計回りに1周し、次に、反時計回りに1周する。

(iii) $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_k \Rightarrow P_{k-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_1$

$\Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_k \rightarrow P_{k+1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_1$

の順に、P_1からP_kへは時計回りに、次に、P_kから反時計回りに1周してP_kに、

最後にP_kからP_1へは時計回りに進む。ただし、$k=2, 3, \cdots, n$。

ところで、(i)、(ii)、および、(iii)の各々のkに対して、経路の数は、

P_iとP_{i+1}間については、最初に通過する際、弧か弦のいずれを選ぶかで、

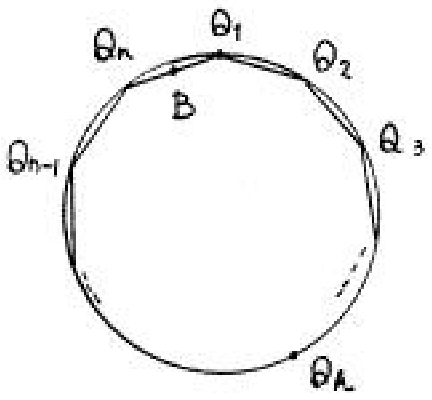
2通りあり、後に通過するのは残りの一方である。ただし、$i=1, 2, \cdots, n$。

より、　2^n通り。

以上より、　$x=2^n+2^n+(n-1)\cdot 2^n=(n+1)\cdot 2^n$

①より、　$\underline{\underline{a=(n+1)\cdot 2^{n+1}}}$ ……(答)

(2) bについて



正n角形の頂点を時計回りに、$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$とし、

Bは辺Q_nQ_1の中点とする。

aと同様に、

時計回りの進み方を $\rightarrow$、反時計回りの進み方を $\Rightarrow$

で表す。また、$Q_{n+1}=Q_1$とする。

始点Bから最初に進む点はQ_1とQ_nがあるが、図形の対称性より、

$B \rightarrow Q_1$の場合の数をyとすると、　$b=2y$ …②

yについて　次の4つの場合に分けることができる。

(ア) $B \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow Q_n \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow Q_n \rightarrow B$

の順に、頂点間の移動がすべて時計回りである。

(イ) $B \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_n \Rightarrow Q_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_2 \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_n \rightarrow B$

の順に、頂点間の移動が、時計回り、反時計回りの順となる。

(ウ) $B \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_k \Rightarrow Q_{k-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_n$

$\Rightarrow Q_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_k \rightarrow Q_{k+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_n \rightarrow B$

の順に、頂点間の移動が、時計回り、反時計回り、時計回りの順となる。

ただし、$k=2, 3, \cdots, \cdots, n-1$。

(エ) $B \rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_n \Rightarrow Q_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_n \rightarrow B$

の順に、頂点間の移動が、反時計回り、時計回りの順となる。

ところで、(ア)、(イ)、(エ)、および、(ウ)の各々のkに対して、経路の数は、

Q_iとQ_{i+1} $(i=1, 2, \cdots, n-1)$間については、aの場合と同様に2通り。

Q_nとQ_1の間については、弧の1通り。

より、　2^{n-1}通り。

以上より、　$y=2^{n-1}+2^{n-1}+(n-2)\cdot 2^{n-1}+2^{n-1}=(n+1)\cdot 2^{n-1}$

②より、　$\underline{\underline{b=(n+1)\cdot 2^n}}$ ……(答)