京都大学理系 (乙) $\boxed{1}$

$y=px+q$ と $y=\log x$ の共有点の x 座標は連立，y 消去して，方程式

$$px+q=\log x \iff \log x-(px+q)=0$$

の実数解と等しい。ここで $f(x)=\log x-(px+q)$ とすると $x>0$ であり，求める条件は

$$\text{方程式 } f(x)=0 \text{ が実数解を持たない} \iff y=f(x) \text{ のグラフが } x \text{ 軸と共有点を持たない} \cdots (*)$$

である。

以下，$x>0$ で考える。

$$f'(x)=\frac{1}{x}-p$$

(i) $p \leqq 0$ のとき
$f'(x)>0$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ であるから $(*)$ を満たさない。

(ii) $p>0$ のとき
$f'(x)=0 \iff x=\dfrac{1}{p}$ であり，増減は次の通りである。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

極大値かつ最大値は $f\left(\dfrac{1}{p}\right)=-\log p-1-q$ である。
従って $(*) \iff -\log p-1-q<0$ となる。

以上より求める条件は $p>0$ かつ $q>-1-\log p$

京都大学理系 (乙) $\boxed{2}$

頂点 A には 0 秒において現れているので，求める場合は「B, C, D のどの頂点にも点 P が少なくとも 1 回以上現れる」ことである。この場合を余事象を用いて考える。
どの頂点にも等確率で移動することから，ある頂点から他の頂点に移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ である。
$n=1,\ 2$ のときは明らかに求める確率は 0 であり，$n \geqq 3$ のときを考える。

(i) A を含めた 2 頂点にのみ現れるとき
例えば頂点 A, B にのみ現れるときは，点 P の移動は $A \to B \to A \to \cdots$ となり確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n (= p_n$ とおく) である。
どの 2 頂点であるかを考えて，この場合の確率は $3p_n = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(ii) A を含めた 3 頂点にのみ現れるとき
例えば頂点 A, B, C に現れるときを考える。
頂点 D に現れない場合の確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ であるが，これは

$$\begin{cases} \text{A, B, C の全てに現れる (この確率を } q_n \text{ とする)} \\ \text{A, B にのみ現れる} \\ \text{A, C にのみ現れる} \end{cases}$$

にもれなく排反に分けることができる。つまり，$q_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 2p_n$
従って，この場合の確率は，どの 3 頂点であるかを考えて $3q_n = 3\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

以上 (i)(ii) から，求める確率は

$$\begin{aligned} 1 - 3p_n - 3q_n &= 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

これは $n=1,\ 2$ のときも正しい。

京都大学理系 (乙) $\boxed{3}$

与えられた直線の方向ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{a}}$, $\overrightarrow{\mathrm{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{c}}$, $\overrightarrow{\mathrm{d}}$ とする。
題意から $\overrightarrow{\mathrm{a}}$, $\overrightarrow{\mathrm{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{c}}$ は一次独立であり，適当な実数 k, l, m を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{d}} = k\overrightarrow{\mathrm{a}} + l\overrightarrow{\mathrm{b}} + m\overrightarrow{\mathrm{c}} \cdots (*)$$

と表せる。また，どの 3 直線も同一平面上にないことから，$klm \neq 0$ である。

直線上の点 A, B, C, D を実数 x, y, z (ただし $xyz \neq 0$) を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x\overrightarrow{\mathrm{a}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = y\overrightarrow{\mathrm{b}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = z\overrightarrow{\mathrm{c}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{d}}$ とすると

題意 $\iff$ 直線上の点 A, B, C, D で平行四辺形となるものが存在する

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ を満たす点が存在する

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を満たす点が存在する

$\iff$ $y\overrightarrow{\mathrm{b}} - x\overrightarrow{\mathrm{a}} = z\overrightarrow{\mathrm{c}} - \overrightarrow{\mathrm{d}} \cdots (*)'$ を満たす実数 x, y, z が存在する

ここで $(*)'$ に $(*)$ を用いて

$$y\overrightarrow{\mathrm{b}} - x\overrightarrow{\mathrm{a}} = z\overrightarrow{\mathrm{c}} - (k\overrightarrow{\mathrm{a}} + l\overrightarrow{\mathrm{b}} + m\overrightarrow{\mathrm{c}})$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{a}}$, $\overrightarrow{\mathrm{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{c}}$ は一次独立であったから，両辺の係数を比較することができて

$$x = k,\ y = -l,\ z = m$$

従って x, y, z を上記のように定めると題意のように平行四辺形が得られ，平面 ABCD が求めるものである。

$\boxed{4}$

$y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点の個数は

$$|x^2-2|=|2x^2+ax-1| \quad \cdots\cdots ①$$

の異なる実数解の個数に等しい。ここに,

$$① \Longleftrightarrow 2x^2+ax-1=x^2-2 \text{ または } 2x^2+ax-1=-(x^2-2)$$

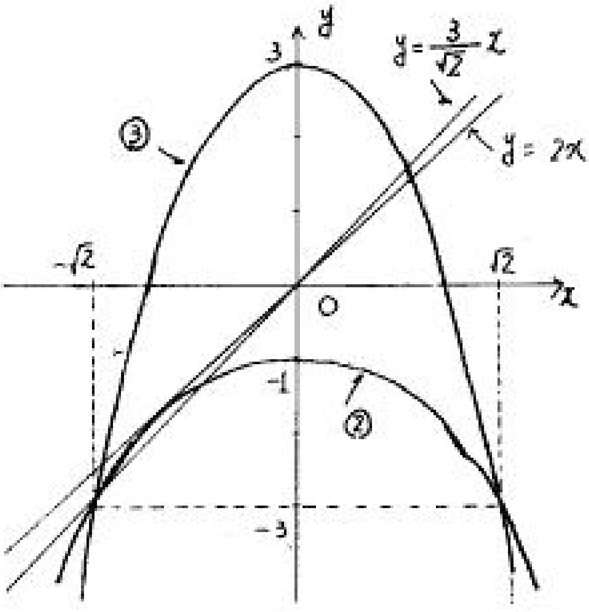
$$\Longleftrightarrow -x^2-1=ax \text{ または } -3x^2+3=ax$$

であるので,

放物線：$y=-x^2-1$ ---② または 放物線 $y=-3x^2+3$ --- ③

と,直線 $y=ax$ --- ④ の共有点の個数

を求めればよい。



(グラフは,x軸方向に拡大してある)

②と③の共有点は,連立して

$$-x^2-1=-3x^2+3 \Longleftrightarrow x^2=2$$

より,点$(\pm\sqrt{2},-3)$。したがって,

④が点$(\pm\sqrt{2},-3)$を通るときの a は

$$\mp\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (\text{複号同順})$$

また,②と④が接するのは,連立して

$$-x^2-1=ax \Longleftrightarrow x^2+ax+1=0$$

より,$a^2-4=0$,すなわち,$a=\pm 2$ のときである。

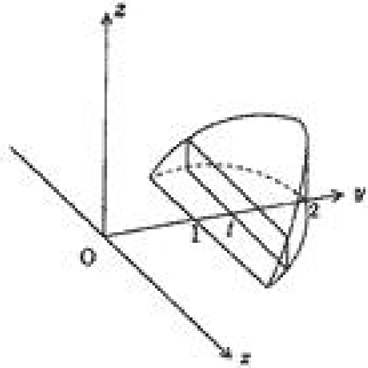
さらに,2つの放物線②と③はy軸対称であり,直線④は原点を通る傾きがaの直線である。

よって,グラフより,

$$\begin{cases} -2<a<2 \text{ のとき, 2個} \\ a=\pm 2,\ a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ のとき, 3個} \\ a<-2,\ a>2 \left(\text{ただし, } a\neq\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ のとき, 4個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

京都大学理系 (乙) $\boxed{5}$

求める立体を F とすると，F は円柱 C を平面 H で分けたもののうち下方にある部分である。



F を平面 $y=t$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ で切断したときの断面積を $S(t)$ とする。
断面は長方形であり図 1，2 から二辺の長さは $2\sqrt{4-t^2}$，$t-1$ となる。
よって

$$S(t)=2(t-1)\sqrt{4-t^2}$$

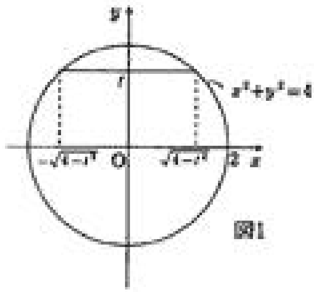


図1

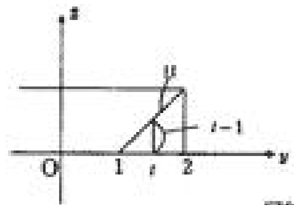


図2

故に求める体積を V として

$$\begin{aligned}V &= \int_1^2 S(t)\,dt \\ &= \int_1^2 2(t-1)\sqrt{4-t^2}\,dt \\ &= \int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt - 2\int_1^2 \sqrt{4-t^2}\,dt \\ &= \int_1^2 -(4-t^2)'\sqrt{4-t^2}\,dt - 2\int_1^2 \sqrt{4-t^2}\,d\end{aligned}$$

ここで $I_1=\int_1^2 (4-t^2)'\sqrt{4-t^2}\,dt$, $I_2=\int_1^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$ とすると $V=-I_1-2I_2$ であり

$$I_1=\left[\frac{2}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=-2\sqrt{3}$$

また，I_2 は図 3 の面積と考えることができ

$$I_2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

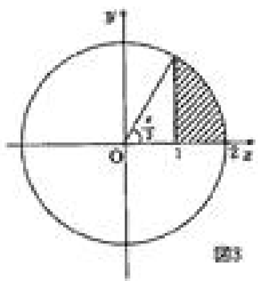


図3

以上より $V=-(-2\sqrt{3})-2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$

京都大学理系 (乙) $\boxed{6}$

地球の中心を O, 地球の半径を r とする。飛行経路 R_1 を含む円を C_1 とし，その中心を P とする。この円 C_1 は北緯 60° の円であるから，その半径は $\frac{r}{2}$ である。

飛行経路 R_1 は円 C_1 上の中心角 60° に対する円弧であるからその飛行距離 l_1 は

$$l_1 = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r}{6}$$

である。また，飛行経路 R_2 の飛行距離 l_2 は $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ として

$$l_2 = 2\pi r \cdot \frac{\theta}{360^\circ}$$

である。

線分 AB の長さは三角形 APB が正三角形となることから $\frac{r}{2}$ となる。

よって三角形 AOB において余弦定理から

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} \\
&= \frac{r^2 + r^2 + \frac{r^2}{4}}{2r^2} \\
&= \frac{7}{8} = 0.875
\end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であり，この範囲において cos は単調である。従って三角関数表から

$$\begin{aligned}
0.8746 < 0.875 < 0.8788 &\iff \cos 29^\circ < \cos\theta < \cos 28.5^\circ \\
&\iff 29^\circ > \theta > 28.5^\circ
\end{aligned}$$

以上より飛行距離の比は

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{2\pi r \cdot \frac{\theta}{360^\circ}}{\frac{\pi r}{6}} = \frac{12\theta}{360^\circ} < \frac{12 \times 29}{360} = \frac{29}{30} = 0.966\cdots$$

よって 題意の通り 3 % 以上短くなる。