$\boxed{1}$

$y = px + q$ と $y = \log x$ の共有点の $x$ 座標は連立，$y$ 消去して，方程式

$$px + q = \log x \iff \log x - (px + q) = 0$$

の実数解と等しい。ここで $f(x) = \log x - (px + q)$ とすると $x > 0$ であり，求める条件は

方程式 $f(x) = 0$ が実数解を持たない $\iff$ $y = f(x)$ のグラフが $x$ 軸と共有点を持たない $\cdots(*)$

である。

以下，$x > 0$ で考える。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - p$$

(i) $p \leqq 0$ のとき
$f'(x) > 0$ であり，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ であるから $(*)$ を満たさない。

(ii) $p > 0$ のとき
$f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{p}$ であり，増減は次の通りである。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{p}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

極大値かつ最大値は $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = -\log p - 1 - q$ である。

従って $(*) \iff -\log p - 1 - q < 0$ となる。

以上より求める条件は $p > 0$ かつ $q > -1 - \log p$

$\boxed{2}$

頂点 A には 0 秒において現れているので，求める場合は「B, C, D のどの頂点にも点 P が少なくとも 1 回以上現れる」ことである。この場合を余事象を用いて考える。
どの頂点にも等確率で移動することから，ある頂点から他の頂点に移動する確率は $\frac{1}{3}$ である。
$n=1,\ 2$ のときは明らかに求める確率は 0 であり，$n \geqq 3$ のときを考える。

(i) A を含めた 2 頂点にのみ現れるとき
例えば頂点 A, B にのみ現れるときは，点 P の移動は $A \to B \to A \to \cdots$ となり確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ($=p_n$ とおく) である。
どの 2 頂点であるかを考えて，この場合の確率は $3p_n = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(ii) A を含めた 3 頂点にのみ現れるとき
例えば頂点 A, B, C に現れるときを考える。
頂点 D に現れない場合の確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ であるが，これは

$$\begin{cases} \text{A, B, C の全てに現れる (この確率を } q_n \text{ とする)} \\ \text{A, B にのみ現れる} \\ \text{A, C にのみ現れる} \end{cases}$$

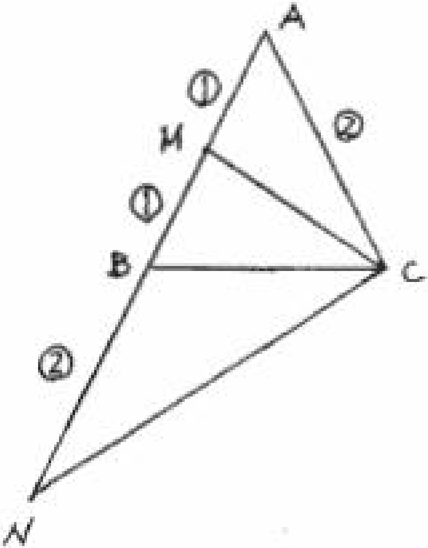
にもれなく排反に分けることができる。つまり，$q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2p_n$
従って，この場合の確率は，どの 3 頂点であるかを考えて $3q_n = 3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

以上 (i)(ii) から，求める確率は

$$\begin{aligned} 1-3p_n-3q_n &= 1-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= 1-\frac{2^n-1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

これは $n=1,\ 2$ のときも正しい。

3




条件より、A, M, B, N はこの順に一直線上にあり、

$AM : MB : BN = 1 : 1 : 2$ ---①

また、$AB = AC$ ---②

$\triangle AMC$ と $\triangle ACN$ について、

①②より、$AC : AN = 2 : (1+1+2) = 1 : 2$

$AM : AC = 1 : 2$

また、$\angle MAC = \angle CAN$

よって、$\triangle AMC \sim \triangle ACN$ で、相似比は $1 : 2$

ゆえに、$MC : CN = 1 : 2$ ---③

ここで、$\triangle CMN$ に着目すると、

①③より、$MB : BN = MC : CN$

したがって、$\angle BCM = \angle BCN$ ■

4

$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ ---- ①

$\Longleftrightarrow$ $x^2+ax+1=0$ または $3x^2+ax-3=0$

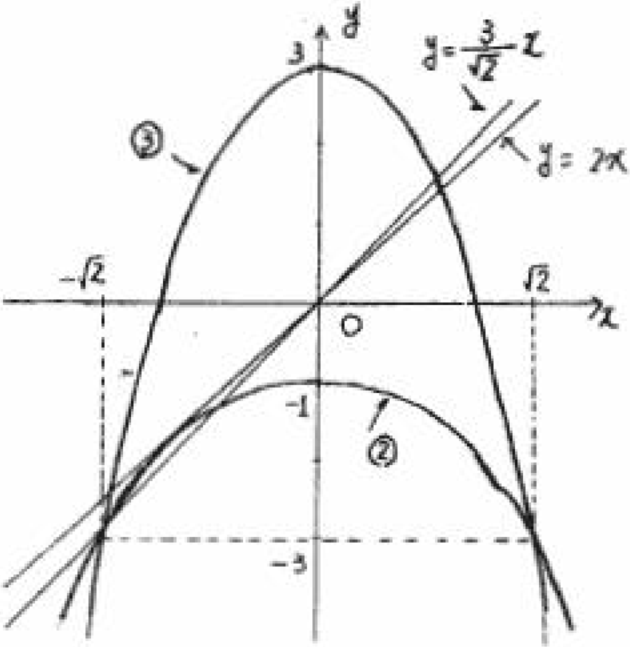
$\Longleftrightarrow$ $-x^2-1=ax$ または $-3x^2+3=ax$

したがって，①を満たす実数$x$の個数は，

放物線：$y=-x^2-1$ ---② または 放物線：$y=-3x^2+3$ ----③

と，直線：$y=ax$ ---④ の共有点の個数

に等しい。




(グラフは，$x$軸方向に拡大してある)

②と③の共有点は，連立して

$-x^2-1=-3x^2+2 \Leftrightarrow x^2=2$

より，点$(\pm\sqrt{2}, -3)$。したがって，

④が点$(\pm\sqrt{2}, -3)$を通るときの$a$は

$\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$ (複号同順)

また，②と④が接するのは，連立して

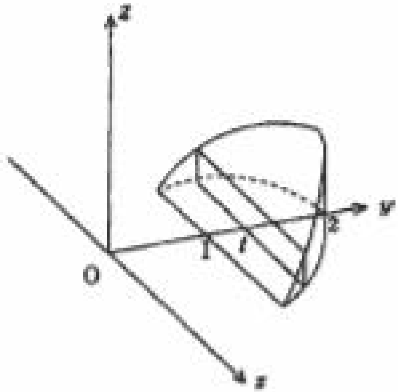
$-x^2-1=ax \Leftrightarrow x^2+ax+1=0$

より，$a^2-4=0$，すなわち，$a=\pm 2$のときである。

さらに，2つの放物線②と③は$y$軸対称であり，直線④は原点を通る傾き$a$の直線である。

よって，グラフより，

$$\begin{cases} -2<a<2 \text{ のとき，2個} \\ a=\pm 2,\ a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ のとき，3個} \\ a<-2,\ a>2\ (\text{ただし，} a\neq\pm\frac{3}{\sqrt{2}}) \text{ のとき，4個} \end{cases}$$ ----(答)




$\boxed{5}$

求める立体を $F$ とすると，$F$ は円柱 $C$ を平面 $H$ で分けたもののうち下方にある部分である。
$F$ を平面 $y=t$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ で切断したときの断面積を $S(t)$ とする。
断面は長方形であり図 1，2 から二辺の長さは $2\sqrt{4-t^2}$, $t-1$ となる。
よって

$$S(t)=2(t-1)\sqrt{4-t^2}$$

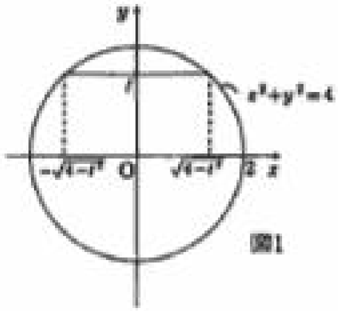



図1

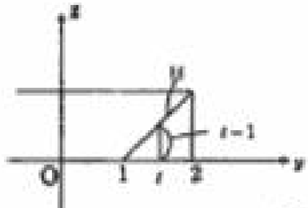



図2

故に求める体積を $V$ として

$$\begin{aligned}V&=\int_1^2 S(t)\,dt\\&=\int_1^2 2(t-1)\sqrt{4-t^2}\,dt\\&=\int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt\\&=\int_1^2 -(4-t^2)'\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,d\end{aligned}$$

ここで $I_1=\displaystyle\int_1^2(4-t^2)'\sqrt{4-t^2}\,dt$, $I_2=\displaystyle\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt$ とすると $V=-I_1-2I_2$ であり

$$I_1=\left[\frac{2}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=-2\sqrt{3}$$

また，$I_2$ は図 3 の面積と考えることができ

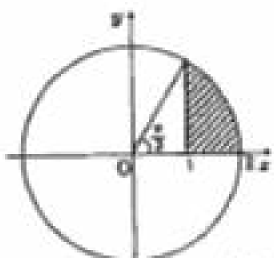



図3

$$I_2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

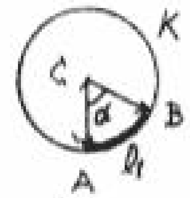
以上より $V=-(-2\sqrt{3})-2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{3}$

$\boxed{6}$

平面 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ でSを切った切り口の円をK，平面OABでSを切った切り口の円をLとする。

Kの中心は $C(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ であり，$\vec{CA}=(\frac{1}{2},0,0)$，$\vec{CB}=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0)$ となり，

$\angle ACB=\alpha\ (0<\alpha<\pi)$ とおくと，

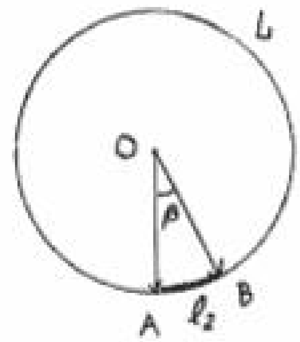



$$\begin{cases} \vec{CA}\cdot\vec{CB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8} \\ \vec{CA}\cdot\vec{CB}=|\vec{CA}|\cdot|\vec{CB}|\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha \end{cases}$$

よって，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$

$0<\alpha<\pi$ より $\alpha=\frac{\pi}{3}$

また，$\ell_1=CA\cdot\alpha=\frac{1}{2}\alpha=\frac{\pi}{6}$ ---- ①




次に $\angle AOB=\beta\ (0<\beta<\pi)$ とおくと，

$$\begin{cases} \vec{OA}\cdot\vec{OB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{8} \\ \vec{OA}\cdot\vec{OB}=|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\cos\beta=1\cdot1\cdot\cos\beta \end{cases}$$

よって $\cos\beta=\frac{7}{8}$

また，$\ell_2=OA\cdot\beta=1\cdot\beta=\beta$

したがって　$\cos\ell_2=\frac{7}{8}$ ---②

①②より，

$$\cos\ell_2-\cos\ell_1=\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{8}>0$$

よって，

$$\cos\ell_2>\cos\ell_1$$

また，$\ell_2=\beta$，$0<\beta<\pi$ より $0<\ell_2<\pi$，①より $\ell_1=\frac{\pi}{6}$

ゆえに，$\ell_2<\ell_1$ ■