

2-1

問1

Hは直線上にあるので、実数 t を用いて、

$$\vec{OH} = \vec{OB} + t\vec{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t-1 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{--- ①}$$

とおける。

次に、 $CH \perp \ell$ より、 $\vec{CH} \cdot \vec{BA} = 0$

$$\text{よって、} \begin{pmatrix} -2t-3 \\ -t-3 \\ t-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2(-2t-3) - (-t-3) + (t-3) = 0$$

$$t = -1$$

よって、 $H(1, 1, -1)$

問2

$k \geq 2$ とし、 $k-1$ 回まで失敗し、 $k-1$ 回目の失敗後に球を袋にもどして、袋の中には白球 2 個、赤球 k 個の計 $k+2$ 個が入っている。

よって、 k 回目に成功する確率は、

$$\frac{1}{{}_k C_2} = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \quad (k \geq 2)$$

k 回目に失敗する確率は

$$1 - \frac{1}{{}_k C_2} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} \quad (k \geq 2) \quad \text{--- ①}$$

また、1回目に失敗する確率は $1 - \frac{1}{{}_3 C_2} = \frac{2}{3}$ であり、①が $k=1$ のときも成

り、 $n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3}, \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}, \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}, \dots, \frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}, \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n-1)! \frac{(n+2)!}{3!} \cdot 2}{(n+1)! \frac{(n+2)!}{2!}} = \frac{2}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\int_0^x f(y) dy + \int_0^1 (x^2 + 2xy + y^2) f(y) dy = x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(y) dy + x^2 \int_0^1 f(y) dy + 2x \int_0^1 y f(y) dy + \int_0^1 y^2 f(y) dy$$

$$= x^2 \quad \text{①に} x=0 \text{代入}$$

$$\int_0^1 y^2 f(y) dy = C \quad \text{--- ②}$$

$$\text{また, } A = \int_0^1 f(y) dy \quad \text{--- ③} \quad B = \int_0^1 y f(y) dy \quad \text{--- ④} \quad \text{と置く}$$

$$\text{①} \Leftrightarrow \int_0^x f(y) dy + Ax^2 + 2Bx + C = x^2 + C \quad \text{--- ⑤} \quad \text{から ②}$$

$$\text{⑤の両辺を} x \text{で微分}$$

$$f(x) + 2Ax + 2B = 2x \Leftrightarrow f(x) = 2(1-A)x - 2B \quad \text{--- ⑥}$$

$$\text{⑥より } f(y) = 2(1-A)y - 2B \quad \text{を ③に代入}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \{2(1-A)y - 2B\} dy \\ &= \left[(1-A)y^2 - 2By \right]_0^1 = (1-A) - 2B \quad \text{--- ③'} \end{aligned}$$

$$\text{④にも代入}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 y \{2(1-A)y - 2B\} dy \\ &= \int_0^1 \{2(1-A)y^2 - 2By\} dy \\ &= \left[\frac{2(1-A)}{3} y^3 - By^2 \right]_0^1 = \frac{2(1-A)}{3} - B \quad \text{--- ④'} \end{aligned}$$

$$\text{③' ④' を解いて } A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}$$

$$\text{⑥より } f(x) = 2(1 - \frac{1}{4})x - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{次に, ②から}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y^3 - y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

$$\text{以上より}$$

$$\underline{f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, \quad C = \frac{5}{24}}$$

3

$$\log_2 x + \log_2 y > 2 + (\log_2 2)(\log_2 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 y}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 y} > 2 + \frac{1}{\log_2 x} \times \frac{1}{\log_2 y} \quad x, y \neq 1 \neq (\log_2 x)(\log_2 y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \log_2 x = X, \log_2 y = Y \text{ として } XY \neq 0 \text{ として}$$

$$\frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} > 2 + \frac{1}{XY}$$

$$\frac{X^2 + Y^2 - 2XY - 1}{XY} > 0$$

$$\frac{(X-Y+1)(X-Y-1)}{XY} > 0 \quad \cdots (*)$$

$$(i) XY < 0 \text{ として } \begin{cases} X > 0 \\ Y < 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} X < 0 \\ Y > 0 \end{cases} \text{ として}$$

(*) より

$$\begin{cases} X-Y+1 > 0 \\ X-Y-1 < 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} X-Y+1 < 0 \\ X-Y-1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{すなわち, } \begin{cases} X > 1 \\ 0 < Y < 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 0 < X < 1 \\ Y > 1 \end{cases} \text{ として}$$

$$\begin{cases} \log_2 x + 1 > \log_2 y \\ \log_2 x - 1 < \log_2 y \end{cases} \text{ として } \begin{cases} 2x > y \\ \frac{x}{2} < y \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \log_2 x + 1 < \log_2 y \\ \log_2 x - 1 > \log_2 y \end{cases} \text{ として } \begin{cases} 2x < y \\ \frac{x}{2} > y \end{cases}$$

$$(ii) XY > 0 \text{ として } \begin{cases} X > 0 \\ Y > 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} X < 0 \\ Y < 0 \end{cases} \text{ として}$$

(i) と同様にして

$$\begin{cases} X > 1 \\ Y > 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 0 < X < 1 \\ 0 < Y < 1 \end{cases} \text{ として}$$

$$\begin{cases} 2x < y \\ \frac{x}{2} < y \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 2x > y \\ \frac{x}{2} > y \end{cases}$$

また (i), (ii) を図示すると

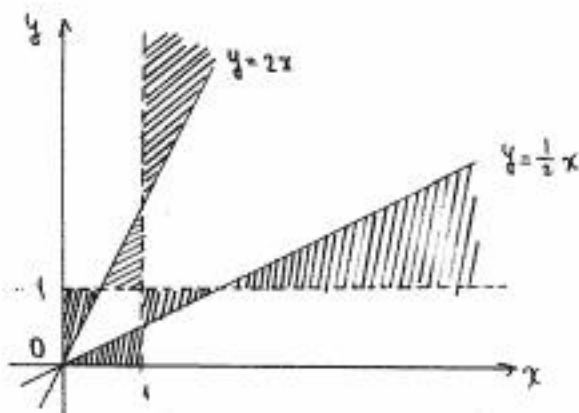


図-斜線部。
境界線はすべて含む。

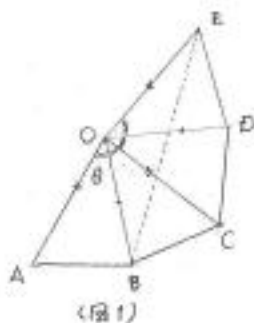
$$\triangle OAB = \triangle OCB = \triangle OCD = \triangle OED \text{ 且全等.}$$

$$\angle AOB = \theta \text{ 且 } \theta < \pi.$$

$$\begin{cases} \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \theta \\ OA = OC = OE, OB = OD \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}, B, O, E \text{ 共线或在一圆上.}$$

$$\text{在 } \frac{\pi}{3} \text{ 时, 不成立. 在 } \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } \theta = \frac{\pi}{3}$$



$$(i) 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}$$

(图1) 中 O 为公共点.

$$\begin{cases} \triangle OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \theta \\ \triangle OBE = \frac{1}{2} OB \cdot OE \sin 3\theta = \frac{1}{2} OB \cdot OA \sin 3\theta \end{cases}$$

$$\text{在 } \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \triangle OAB : \triangle OBE = 2 : 3 \text{ 成立.}$$

$$\sin \theta : \sin 3\theta = 2 : 3$$

$$3 \sin \theta = 2 \sin 3\theta \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \sin 3\theta &= \sin(\theta + 2\theta) = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \\ &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$$\text{由 ① 得, } \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \text{--- ②}$$

① 与 ② 联立得,

$$3 \sin \theta = 2 (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$$

$$\sin \theta (8 \sin^2 \theta - 3) = 0$$

$$\sin \theta = 0, \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\theta < \frac{\pi}{3} \text{ 时, } 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 时 } 0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 成立, } 0 < \frac{\sqrt{6}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 成立.}$$

$$(ii) \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}$$

(图2) 中 O 为公共点.

$$\begin{cases} \triangle OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \theta \\ \triangle OBE = \frac{1}{2} OB \cdot OE \sin (2\pi - 3\theta) \\ = -\frac{1}{2} OB \cdot OA \sin 3\theta \end{cases}$$

$$\text{在 } \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \triangle OAB : \triangle OBE = 2 : 3 \text{ 成立.}$$

$$\sin \theta : (-\sin 3\theta) = 2 : 3$$

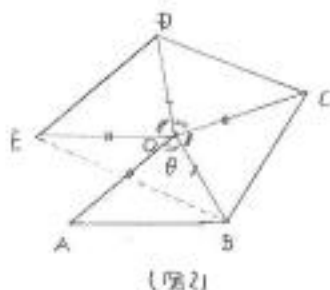
$$3 \sin \theta = -2 \sin 3\theta$$

① 与 ② 联立得,

$$3 \sin \theta = -2 (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$$

$$\sin \theta (8 \sin^2 \theta - 9) = 0 \quad \text{--- ③}$$

$$\theta < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 时 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta < 1. \text{ 在 } \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta < 1.$$



$$\text{在 } \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

1 から p^n までの p^n 個の数

$$1, 2, 3, \dots, p, p+1, \dots, 2p, \dots, (p-1)p, \dots, p^2, \dots, p^n$$

のうち、正の整数 k ($1 \leq k \leq n$) に対して p^k で割り切れるものは

$$\frac{p^n}{p^k} = p^{n-k} \text{ (個)}$$

つまり

$$p \text{ で割り切れる数は } p^{n-1} \text{ (個)}$$

$$p^2 \text{ で割り切れる数は } p^{n-2} \text{ (個)}$$

$$p^3 \text{ で割り切れる数は } p^{n-3} \text{ (個)}$$

$$\vdots$$

$$p^{n-1} \text{ で割り切れる数は } p \text{ (個)}$$

$$p^n \text{ で割り切れる数は } 1 \text{ (個)}$$

従って、 $(p^n)!$ は p で

$$\sum_{k=1}^n p^{n-k} = p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1} \text{ (回)}$$

割り切れることとなる。

(注) 例えば $p=5$, $n=3$ のとき

1 から 5^3 までの 5 の倍数が何回 5 で割り切れるかを視覚的に求めると
(• 1 つが 1 回 5 で割り切れることを表す)

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	...	125
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	...	•
				•					•	...	•
										...	•

• の個数を求めればよく、横方向に数えると

$$\text{上から 1 段目には } \frac{5^3}{5} = 5^2 \text{ (個)}$$

$$\text{上から 2 段目には } \frac{5^3}{5^2} = 5 \text{ (個)}$$

$$\text{上から 3 段目には } \frac{5^3}{5^3} = 1 \text{ (個)}$$

$$\text{つまり求める回数は } 5^2 + 5 + 1 = \frac{5^3 - 1}{5 - 1}$$