

$P(3, 0, 4s)$, $Q(0, 2, 4t)$ である。

また、 O, P, Q を含む平面を α とし、 α に垂直なベクトルを

$\vec{n} = (a, b, c)$ とおくと、

$$\vec{n} \cdot \vec{OP} = 0, \vec{n} \cdot \vec{OQ} = 0$$

$$\text{よって} \begin{cases} 3a + 4sc = 0 \\ 2b + 4tc = 0 \end{cases}$$

$$\text{ゆえに} \begin{cases} a = -\frac{4}{3}sc \\ b = -2tc \end{cases}$$

$$\vec{n} = (-\frac{4}{3}sc, -2tc, c) = -\frac{c}{3}(4s, 6t, -3)$$

となる。よって、 $\vec{n} = (4s, 6t, -3)$ とおくとよい。

よって、点 D を通り、 α に垂直な直線上の点 R は、実数 h を用いて

$$\vec{OR} = \vec{OD} + h\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 4s \\ 6t \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4sh \\ 6th \\ 4-3h \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおく。

また、線分 AC 上の点 R は、 $A(3, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ より

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = -\frac{2}{3}x + 2 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

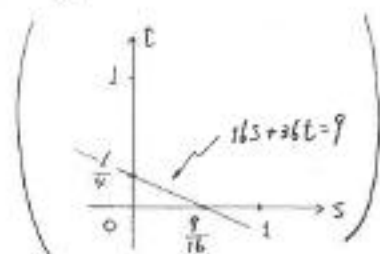
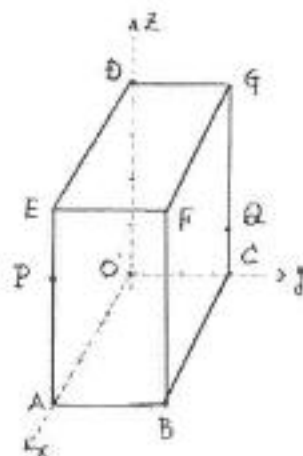
点 R が線分 AC 上にあるための条件を求めればよいので、 $\textcircled{1} \textcircled{2}$ より、

$$\begin{cases} 4-3h = 0 \\ 6th = -\frac{2}{3} \cdot 4sh + 2 \\ 0 \leq 4sh \leq 3 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \begin{cases} h = \frac{4}{3} \\ 16s + 36t = 9 \\ 0 \leq s \leq \frac{9}{16} \end{cases}$$

よって、 $0 < s < 1$, $0 < t < 1$

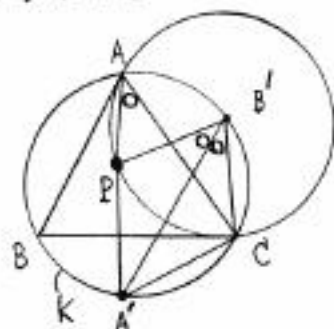
よって、求める条件は、

$$\underline{16s + 36t = 9, 0 < s < \frac{9}{16}}$$



6点 A, B, C, A', B', C' が同一円周上 $\Leftrightarrow P$ が $\triangle ABC$ の内心と示す。

$\Rightarrow$ について



6点 A, B, C, A', B', C' が同一円周上にある円 Γ があり

$\triangle ABC$ の外接円 Γ とする。

また、 $\triangle PBC, \triangle PAC$ の外接円 Γ_K, Γ_C とする。

$$\angle PAC = \frac{1}{2} \angle PBC \quad (\Gamma_C \text{ の円周角と中心角}) \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A'P &= A'C \quad (\Gamma_{K'} \text{ の半径}) \\ B'P &= B'C \quad (\Gamma_{K''} \text{ の半径}) \end{aligned}$$

$$\text{従って } \triangle PA'B' \equiv \triangle CA'B' \quad \text{となり, } \angle A'P'B' = \frac{1}{2} \angle PBC \quad \text{--- ②}$$

$$\text{また, } \angle A'B'C = \angle A'AC \quad (\Gamma_K \text{ の円周角}) \quad \text{--- ③}$$

$$\text{①} \sim \text{③} \text{ より } \angle PAC = \angle A'AC$$

つまり A, P, A' は一直線上にある。

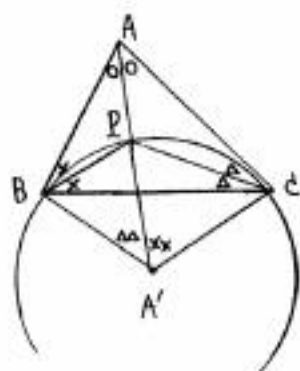
$$\Rightarrow \angle BAA' = \angle CAA' \quad (\Gamma_K \text{ において } A'B = A'C \text{ から等弦に對する円周角})$$

よって P は $\angle BAC$ の角の二等分線上にある。

他の内角 $\angle ABC, \angle ACB$ の二等分線上でも同様に示せる。

つまり P は $\triangle ABC$ の内心と一致。

$\Leftarrow$ について



$$\angle PA'B = 2\angle PCB \quad (\Gamma_{K'} \text{ の円周角と中心角})$$

$$= \angle ACB \quad (P \text{ は内心})$$

$$\text{同様に } \angle PA'C = \angle ABC$$

従って 四角形 $ABA'C$ において

$$\angle BAC + \angle BA'C = \angle BAC + (\angle ABC + \angle ACB) = \pi$$

$$\Rightarrow \text{内対角之和 } \pi \text{ (なり), 4点 } A, B, A', C \text{ は}$$

同一円周上にある。

同様に B' も $\triangle ABC$ の外接円上, C' も $\triangle ABC$ の外接円上といえる。

つまり 6点 A, B, C, A', B', C' は同一円周上にある。

番号 n のカードを $[n]$ で表す。

$[n]$ が一番上にあるとき、次の l 回の試行で、

- ・ l 回の試行で A になる (事象 A)
- ・ l 回の試行で B になる (事象 B)



のいずれかである。

また、 $[n]$ は最初一番下にある。

したがって、" $[n]$ が一番上にくる" ためには必要な試行の回数は、 $n-1$ 回以上であり、

(i) $n-1$ 回の試行後に、 $[n]$ がはじめて一番上にある

(ii) n 回の試行後に、 $[n]$ がはじめて一番上にある

に分けて考えるべき。

ところで、 $[n]$ が下から h 番目 ($h=1, 2, \dots, n-1$) にあるとき

$$A \text{ の確率は } \frac{h}{n}, \quad B \text{ の確率は } \frac{n-h}{n}$$

また、 $[n]$ が一番上にあるとき、次の l 回の試行で l 回の試行で B になる事象 C の確率は $\frac{1}{n^l}$ である。

(i) について $1 \sim n-1$ 回の試行で A が起こり、 n 回目の試行で C が起こるまで、

$$\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^n}$$

(ii) について $1 \sim n-1$ 回の試行で B が起こり、 l 回は A が起こる。

B が l 回目 ($l=1, 2, \dots, n-1$) で起こる場合の確率を $p(l)$ とおくと、

$$\begin{aligned} p(l) &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{l-1}{n} \times \frac{n-l}{n} \times \frac{l}{n} \times \frac{l+1}{n} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{(n-1)!}{n^n} (n-l) \end{aligned}$$

以上より、求める確率を P とおくと、

$$P = \frac{(n-1)!}{n^n} + \sum_{l=1}^{n-1} p(l) = \frac{(n-1)!}{n^n} + \frac{(n-1)!}{n^n} \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)$$

$$\text{よって、} \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{ゆえに、} P = \frac{(n-1)!}{n^n} \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{2} \right\} = \frac{(n-1)!}{2n^n} (n^2 - n + 2)$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と単位行列 E , 零行列 O に対してハミルトン・ケーリーの定理を $ad - bc = 1$ のもとで用いて

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O \iff A^2 = (a + d)A - E \cdots \textcircled{1}$$

ここでベクトル $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x_n} = \overrightarrow{\text{OP}_n}$ とすると $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_{n+2}} &= A^2 \cdot A^n \vec{x_0} \\ &= \{(a + d)A - E\} \vec{x_n} \\ &= (a + d)\overrightarrow{x_{n+1}} - \vec{x_n} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで $|\vec{x_2}| = |\vec{x_1}| = |\vec{x_0}| = 1$ かつ $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ から

$$\begin{aligned} |\vec{x_2}|^2 &= |(a + d)\vec{x_1} - \vec{x_0}|^2 \\ &= (a + d)^2 |\vec{x_1}|^2 - 2(a + d)\vec{x_1} \cdot \vec{x_0} + |\vec{x_0}|^2 \\ &= (a + d)^2 - 2(a + d)a + 1 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} 1 &= (a + d)^2 - 2(a + d)a + 1 \iff (a + d)(a - d) = 0 \\ &\iff a = d \text{ or } a = -d \end{aligned}$$

(i) $a = d$ のとき

$\textcircled{2}$ から $\overrightarrow{x_{n+2}} = 2a\overrightarrow{x_{n+1}} - \vec{x_n}$ となるが, これをみたす $\vec{x_n}$ が, 結論より少し強い条件 $|\vec{x_{n+1}}| = |\vec{x_n}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_{n+1}} \cdot \vec{x_n} = a$ をみたすことを数学的帰納法によって示す。

(I) $n = 0$ のとき $|\vec{x_1}| = |\vec{x_0}| = 1$ かつ $\vec{x_1} \cdot \vec{x_0} = a$ は既に表示されている。

(II) $|\vec{x_{k+1}}| = |\vec{x_k}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_{k+1}} \cdot \vec{x_k} = a$ ならば $|\vec{x_{k+2}}| = |\vec{x_{k+1}}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_{k+2}} \cdot \vec{x_{k+1}} = a$ を示す。

$$\begin{aligned} |\vec{x_{k+2}}|^2 &= (2a)^2 |\vec{x_{k+1}}|^2 - 2(2a)\overrightarrow{x_{k+1}} \cdot \vec{x_k} + |\vec{x_k}|^2 \\ &= 4a^2 - 4a \cdot a + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{x_{k+2}} \cdot \vec{x_{k+1}} = (2a\overrightarrow{x_{k+1}} - \vec{x_k}) \cdot \vec{x_{k+1}} = 2a - a = a$$

これで示せた。

以上 (I)(II) から数学的帰納法によって題意が示せた。

(ii) $a = -d$ のとき

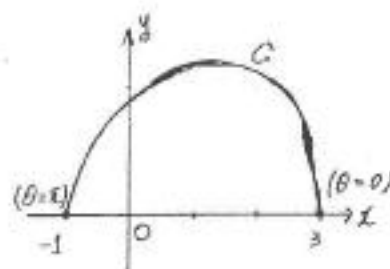
$\textcircled{2}$ から $\overrightarrow{x_{n+2}} = -\vec{x_n}$ であり, この関係を繰り返し用いて

$$\vec{x_n} = \begin{cases} (-1)^m \vec{x_0} & (n = 2m) \\ (-1)^m \vec{x_1} & (n = 2m + 1) \end{cases}$$

よっていずれにせよ $|\vec{x_n}| = 1$

C 上の点を直交座標 (x, y) で表すとき,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = (2 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = (2 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{d.r.} \quad \frac{dx}{d\theta} &= -\sin \theta \cos \theta + (2 + \cos \theta) \cdot (-\sin \theta) \\ &= -2 \sin \theta (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

1. $\theta = 0$ から $\theta = \pi$ まで, $\frac{dx}{d\theta} < 0$ となる, x は単調に減少する.

2. $\theta = 0$ のとき $x = 3$, $\theta = \pi$ のとき $x = -1$

よって, 求める体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^3 \pi y^2 dx \\ &= \pi \int_{\pi}^0 (2 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cdot \{-2 \sin \theta (1 + \cos \theta)\} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} (2 + \cos \theta)^2 (1 - \cos^2 \theta) (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_1^{-1} (2+t)^2 (1-t^2) (1+t) (-1) dt \quad (\cos \theta = t \text{ と置換}) \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (-t^5 - 5t^4 - 7t^3 + t^2 + 9t + 4) dt \\ &= 4\pi \int_0^1 (-5t^4 + t^2 + 4) dt \\ &= 4\pi \left[-t^5 + \frac{1}{3}t^3 + 4t \right]_0^1 \\ &= \frac{40}{3}\pi \end{aligned}$$

解答中に現れる文字は特に断りのない限り全て整数とする。

与えられた式から

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) = (aa_n + 2bb_n) + (ab_n + ba_n)\sqrt{2}$$

ここで a_{n+1} , b_{n+1} , a_n , b_n , a , b は整数 (有理数), $\sqrt{2}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} a_{n+1} = aa_n + 2bb_n \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = ab_n + ba_n \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(1) $a_1 = a$, $b_1 = b$ であり, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から

$$\begin{cases} a_2 = a^2 + 2b^2 \cdots \textcircled{3} \\ b_2 = 2ab \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

まず「 a_2 が奇数」であることを示す。

$\textcircled{3}$ において a が奇数であることから, a_2 が奇数であるといえる。

次に「 a_2 , b_2 が互いに素」であることを示す。

a_2 , b_2 が互いに素でない, つまりある素因数 p でともに割り切れるとする。 a_2 が奇数であるから p も奇数であり, $\textcircled{4}$ より p は a または b のいずれかを割り切る。

- p が a を割り切るとき
 $a_2 = p\alpha_n$, $a = p\alpha$ と表せて $\textcircled{3}$ から

$$2b^2 = p(\alpha_n - p\alpha^2)$$

p は奇数であったから, p は b^2 を, つまり b を割り切ることとなり a , b が互いに素であることに反する。

- p が b を割り切るとき
 $b = p\beta$ と表せて, 上と同様にして

$$a^2 = p(\alpha_n - 2p\beta^2)$$

となって矛盾を生じる。

以上から a_2 , b_2 が互いに素であることが示せた。

(2) 「 a_n が奇数」であることを示す。

$\textcircled{1}$ から, a が奇数であるから, 帰納的に a_n が奇数であるといえる。

次に「 a_n , b_n が互いに素」であることを示す。

まず, 0 以上の整数 k に対して a_{2^k} と b_{2^k} が互いに素であることを数学的帰納法によって示す。

(I) $k = 0$ のとき

$a_1 = a$, $b_1 = b$ であり, a_1 と b_1 は互いに素である。

(II) 0 以上の整数 m に対して a_{2^m} と b_{2^m} が互いに素 $\Rightarrow a_{2^{m+1}}$ と $b_{2^{m+1}}$ が互いに素 を示す。

$$\begin{aligned} a_{2^{m+1}} + b_{2^{m+1}}\sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})^{2^{m+1}} \\ &= \{(a + b\sqrt{2})^{2^m}\}^2 \\ &= (a_{2^m} + b_{2^m}\sqrt{2})^2 \\ &= a_{2^m}^2 + 2b_{2^m}^2 + 2a_{2^m}b_{2^m}\sqrt{2} \end{aligned}$$

これについて (1) と同様にして $a_{2^{m+1}}$ と $b_{2^{m+1}}$ が互いに素であることが示せる。

(I)(II) より数学的帰納法によって a_{2^k} と b_{2^k} が互いに素である。…(*)

ここで $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から

$$a_n, b_n \text{ が互いに素 でない} \Rightarrow a_{n+1}, b_{n+1} \text{ が互いに素 でない}$$

ことが分かり, この対偶命題を考え

$$a_{n+1}, b_{n+1} \text{ が互いに素} \Rightarrow a_n, b_n \text{ が互いに素}$$

よって $k \geq 1$ に対して

$$a_{2^k}, b_{2^k} \text{ が互いに素} \Rightarrow a_{2^k-1}, b_{2^k-1} \text{ が互いに素}$$

が分かり, これを繰り返すと (a_{2^k}, b_{2^k}) , (a_{2^k-1}, b_{2^k-1}) , $\cdots$ $(a_{2^k-(2^{k-1}-1)}, b_{2^k-(2^{k-1}-1)})$ の組がそれぞれ互いに素であることが示せる。(*)'

以上 (*) (*)' から, 全ての正の整数に対して題意が示せた。