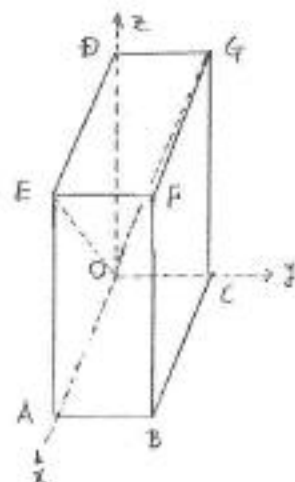


問1



O, E, Gを含む平面を α とし、 α に垂直なベクトルを

$\vec{n} = (p, q, r)$ とおくと、

$$\vec{n} \cdot \vec{OE} = 0, \vec{n} \cdot \vec{OG} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 3p + ra = 0 \\ 2q + ra = 0 \end{cases}$$

$$\text{よって、} \begin{cases} p = -\frac{a}{3}r \\ q = -\frac{a}{2}r \end{cases}$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{a}{3}r, -\frac{a}{2}r, r\right) = -\frac{r}{6}(2a, 3a, -6)$$

よって、これを、 $\vec{n} = (2a, 3a, -6)$ とおくとよい。

点Pは、点Dを端り α に垂直な直線にある点。果数 t を用いて

$$\vec{OP} = \vec{OD} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at \\ 3at \\ -6t+a \end{pmatrix} \quad \text{--- ①}$$

とおける。

$$\text{また、線分BC上の点} \begin{cases} z=0 \\ y=2 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \text{--- ②}$$

点Pが線分BC上にあるための条件を求めよう。①②より、

$$\begin{cases} -6t+a=0 & \text{--- ③} \\ 3at=2 & \text{--- ④} \\ 0 \leq 2at \leq 3 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

$$\text{③より } t = \frac{a}{6} \text{ であり、これを④に代入して } a^2 = 4.$$

$$a > 0 \text{ より、} a = 2. \text{ これを③より、} t = \frac{1}{3}.$$

$$\text{これを⑤に代入して } 2at = \frac{4}{3} \text{ であり、⑤が成立する。}$$

$$\text{よって、} a = 2, t = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって、} \underline{a=2, P\left(\frac{4}{3}, 2, 0\right)}$$

問2

$k \geq 2$ とし、 $k-1$ 回目まで失敗し、 $k-1$ 回目の失敗後に球を袋にもどしたとき、

袋の中からは白球2個、赤球 k 個の計 $k+2$ 個がとれる。

よって、 k 回目成功する確率は、

$$\frac{1}{{}_k C_2} = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \quad (k \geq 2)$$

k 回目失敗する確率は

$$1 - \frac{1}{{}_k C_2} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} \quad (k \geq 2) \quad \text{--- ①}$$

また、1回目失敗する確率は $1 - \frac{1}{{}_3 C_2} = \frac{2}{3}$ であり、①で $k=1$ としたとしても成立する。

よって、 $n-1$ 回目まで失敗し n 回目成功する確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n} \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \cdot \frac{2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot \frac{(n+2)!}{3!} \cdot 2}{(n+1)! \cdot \frac{(n+2)!}{2!}} = \underline{\underline{\frac{2}{3n(n+1)}}} \end{aligned}$$

$\triangle OA_1A_2 \equiv \triangle OA_2A_3 \equiv \triangle OA_3A_4 \equiv \triangle OA_4A_5$ であるので
 $\angle A_1OA_2 = \theta$ とおくと $0 < \theta < \pi$ であり

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_4 = \angle A_4OA_5 = \theta$$

$$OA_1 = OA_3 = OA_5, \quad OA_2 = OA_4$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ または $\frac{2\pi}{3}$ のときは A_2, O, A_5 が一直線上にあり題意を満たさない。よって $\theta \neq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ のもとで考える。

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ または $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ のとき

(図1) または (図2) のようになり

$$\begin{cases} \triangle OA_1A_2 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \sin \theta \\ \triangle OA_2A_5 = \begin{cases} \frac{1}{2} OA_2 \cdot OA_5 \sin 3\theta & (0 < \theta < \frac{\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} OA_2 \cdot OA_5 \sin(3\theta - 2\pi) & (\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi) \end{cases} \\ = \frac{1}{2} OA_2 \cdot OA_1 \sin 3\theta \end{cases}$$

ここで、題意の整数を N とすると $\triangle OA_2A_5 = N \triangle OA_1A_2$ であり

$$\sin 3\theta = N \sin \theta \cdots (1)$$

をみたち。

ところで

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(\theta + 2\theta) = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \\ &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + \cos \theta \cdot 2\sin \theta \cos \theta \\ &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

すなわち $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \cdots (2)$

①に②を代入して

$$\begin{aligned} 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta &= N \sin \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta \{(3 - N) - 4\sin^2 \theta\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \text{ or } \sin^2 \theta &= \frac{3 - N}{4} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ または $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ では $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdots (3)$ であり

$\sin^2 \theta = \frac{3 - N}{4} > 0$ つまり $0 < N < 3$ でなくてはならない。

これをみたち正の整数 N は $N = 1$ または $N = 2$ であるから、③のもとで

$$\sin \theta = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & (N = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (N = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり、 θ の値はそれぞれ $\theta = \frac{\pi}{4}$ or $\frac{3\pi}{4}$ または $\theta = \frac{\pi}{6}$ or $\frac{5\pi}{6}$ となる。

(ii) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ のとき

(図3) のようになり

$$\begin{cases} \triangle OA_1A_2 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \sin \theta \\ \triangle OA_2A_5 = \begin{cases} \frac{1}{2} OA_2 \cdot OA_5 \sin(2\pi - 3\theta) \\ = -\frac{1}{2} OA_2 \cdot OA_1 \sin 3\theta \end{cases} \end{cases}$$

(i) と同様にして

$$-\sin 3\theta = N \sin \theta$$

をみたち。これに③を用いると

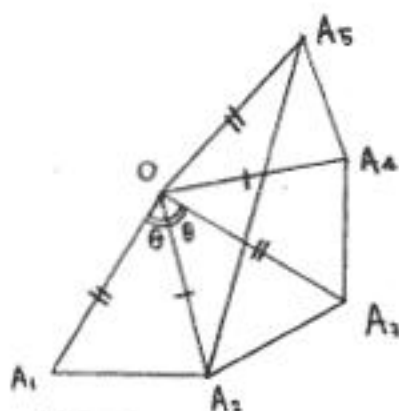
$$\begin{aligned} -(3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) &= N \sin \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta \{-(3 + N) + 4\sin^2 \theta\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \text{ or } \sin^2 \theta &= \frac{3 + N}{4} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ では $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta \leq 1 \cdots (4)$ であるから

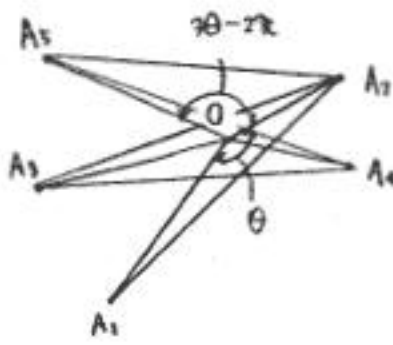
(i) と同様にして $N = 1$ が適し、④のもとで

$\sin \theta = 1$ つまり θ の値は $\theta = \frac{\pi}{2}$

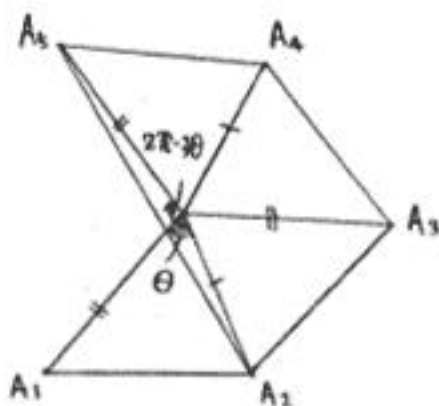
以上 (i)(ii) から $\angle A_1OA_2 = \frac{\pi}{6}$ または $\frac{\pi}{4}$ または $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3\pi}{4}$ または $\frac{5\pi}{6}$



(図1)



(図2)



(図3)

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 y}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 y} > 2 + \frac{1}{\log_2 x} \times \frac{1}{\log_2 y} \quad x, y \neq 1 \text{ 且 } (\log_2 x)(\log_2 y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \log_2 x = X, \log_2 y = Y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad XY \neq 0$$

$$\frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} > 2 + \frac{1}{XY}$$

$$\frac{X^2 + Y^2 - 2XY - 1}{XY} > 0$$

$$\frac{(X-Y+1)(X-Y-1)}{XY} > 0 \quad \cdots (*)$$

$$(i) \quad XY < 0 \text{ 时 } \begin{cases} X > 0 \\ Y < 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} X < 0 \\ Y > 0 \end{cases} \text{ 成立}$$

(*) から

$$\begin{cases} X-Y+1 > 0 \\ X-Y-1 < 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} X-Y+1 < 0 \\ X-Y-1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{すなわち, } \begin{cases} x > 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ y > 1 \end{cases} \text{ 成立}$$

$$\begin{cases} \log_2 x + 1 > \log_2 y \\ \log_2 x - 1 < \log_2 y \end{cases} \text{ 时 } \begin{cases} 2x > y \\ \frac{x}{2} < y \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \log_2 x + 1 < \log_2 y \\ \log_2 x - 1 > \log_2 y \end{cases} \text{ 时 } \begin{cases} 2x < y \\ \frac{x}{2} > y \end{cases}$$

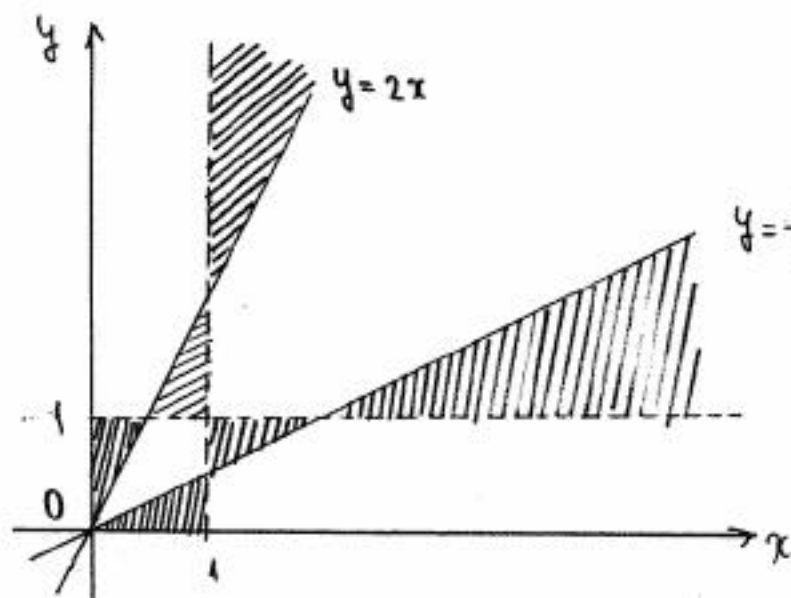
$$(ii) \quad XY > 0 \text{ 时 } \begin{cases} X > 0 \\ Y > 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} X < 0 \\ Y < 0 \end{cases} \text{ 成立}$$

(i) と同様にして

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \text{ 成立}$$

$$\begin{cases} 2x < y \\ \frac{x}{2} < y \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 2x > y \\ \frac{x}{2} > y \end{cases}$$

以上 (i)(ii) を図示すると



図の斜線部。

境界線は可“含可”。

自然数 n に対して平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ とする。このとき題意は

$$|\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1 \text{ ならば, すべての } n \text{ に対して } |\overrightarrow{OP_n}| = 1 \text{ を示す}$$

こととなる。

ここで与えられた関係式から $n \geq 2$ に対して $\overrightarrow{OP_n} = A^{n-1}\overrightarrow{OP_1}$ である。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と単位行列 E , 零行列 O に対してハミルトン・ケーリーの定理を $ad - bc = 1$ のもついで用いて

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \iff A^2 = (a+d)A - E \cdots \textcircled{1}$$

ここでベクトル $\overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{OP_n}$ とすると $\textcircled{1}$ より $n \geq 2$ で

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_{n+2}} &= A^2 \cdot A^{n-1}\overrightarrow{x_1} \\ &= \{(a+d)A - E\}\overrightarrow{x_n} \\ &= (a+d)\overrightarrow{x_{n+1}} - \overrightarrow{x_n} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

これは $n=1$ でも成立する。

ここで $|\overrightarrow{x_3}| = |\overrightarrow{x_2}| = |\overrightarrow{x_1}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ から

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{x_3}|^2 &= |(a+d)\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}|^2 \\ &= (a+d)^2|\overrightarrow{x_2}|^2 - 2(a+d)\overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{x_1} + |\overrightarrow{x_1}|^2 \\ &= (a+d)^2 - 2(a+d)a + 1 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} 1 &= (a+d)^2 - 2(a+d)a + 1 \iff (a+d)(a-d) = 0 \\ &\iff a = d \text{ or } a = -d \end{aligned}$$

(i) $a = d$ のとき

② から $\overrightarrow{x_{n+2}} = 2a\overrightarrow{x_{n+1}} - \overrightarrow{x_n}$ となるが, これをみたす $\overrightarrow{x_n}$ が, 結論より少し強い条件 $|\overrightarrow{x_{n+1}}| = |\overrightarrow{x_n}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_{n+1}} \cdot \overrightarrow{x_n} = a$ をみたすことを数学的帰納法によって示す。

(I) $n=1$ のとき $|\overrightarrow{x_2}| = |\overrightarrow{x_1}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{x_1} = a$ は既に示されている。

(II) $|\overrightarrow{x_{k+1}}| = |\overrightarrow{x_k}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_{k+1}} \cdot \overrightarrow{x_k} = a$ ならば $|\overrightarrow{x_{k+2}}| = |\overrightarrow{x_{k+1}}| = 1$ かつ $\overrightarrow{x_{k+2}} \cdot \overrightarrow{x_{k+1}} = a$ を示す。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{x_{k+2}}|^2 &= (2a)^2|\overrightarrow{x_{k+1}}|^2 - 2(2a)\overrightarrow{x_{k+1}} \cdot \overrightarrow{x_k} + |\overrightarrow{x_k}|^2 \\ &= 4a^2 - 4a \cdot a + 1 = 1 \\ \overrightarrow{x_{k+2}} \cdot \overrightarrow{x_{k+1}} &= (2a\overrightarrow{x_{k+1}} - \overrightarrow{x_k}) \cdot \overrightarrow{x_{k+1}} = 2a - a = a \end{aligned}$$

これで示せた。

以上 (I)(II) から数学的帰納法によって題意が示せた。

(ii) $a = -d$ のとき

② から $\overrightarrow{x_{n+2}} = -\overrightarrow{x_n}$ であり, この関係を繰り返し用いて自然数 m に対して

$$\overrightarrow{x_n} = \begin{cases} (-1)^{m+1}\overrightarrow{x_1} & (n = 2m-1) \\ (-1)^m\overrightarrow{x_2} & (n = 2m) \end{cases}$$

よっていずれにせよ $|\overrightarrow{x_n}| = 1$

1 から p^n までの p^n 個の数

$$1, 2, 3, \dots, p, p+1, \dots, 2p, \dots, (p-1)p, \dots, p^2, \dots, p^n$$

のうち、正の整数 k ($1 \leq k \leq n$) に対して p^k で割り切れるものは

$$\frac{p^n}{p^k} = p^{n-k} \text{ (個)}$$

つまり

$$p \text{ で割り切れる数は } p^{n-1} \text{ (個)}$$

$$p^2 \text{ で割り切れる数は } p^{n-2} \text{ (個)}$$

$$p^3 \text{ で割り切れる数は } p^{n-3} \text{ (個)}$$

$\vdots$

$$p^{n-1} \text{ で割り切れる数は } p \text{ (個)}$$

$$p^n \text{ で割り切れる数は } 1 \text{ (個)}$$

従って、 $(p^n)!$ は p で

$$\sum_{k=1}^n p^{n-k} = p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1} \text{ (回)}$$

割り切れることとなる。

(注) 例えば $p=5$, $n=3$ のとき

1 から 5^3 までの 5 の倍数が何回 5 で割り切れるかを視覚的に求めると

(● 1 つが 1 回 5 で割り切れることを表す)

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	...	125
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	...	●
				●					●	...	●
										...	●

● の個数を求めればよく、横方向に数えると

$$\text{上から 1 段目には } \frac{5^3}{5} = 5^2 \text{ (個)}$$

$$\text{上から 2 段目には } \frac{5^3}{5^2} = 5 \text{ (個)}$$

$$\text{上から 3 段目には } \frac{5^3}{5^3} = 1 \text{ (個)}$$

$$\text{つまり求める回数は } 5^2 + 5 + 1 = \frac{5^3 - 1}{5 - 1}$$

与えられた曲線を C とし, C を直交座標系 (x, y) で表すと

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin \theta \cos \theta + (1 + \cos \theta)(-\sin \theta) \\ &= -\sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= -(\sin \theta + \sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= -\sin \theta \sin \theta + (1 + \cos \theta)(\cos \theta) \\ &= \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos \theta + \cos 2\theta \end{aligned}$$

従って, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta &= \int_0^\pi \sqrt{-(\sin \theta + \sin 2\theta)^2 + (\cos \theta + \cos 2\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2(\sin \theta \sin 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta)} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos(2\theta - \theta)} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4 \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2}} d\theta \\ &= \int_0^\pi 2\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ では $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ であるから

$$\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= 2 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi \\ &= 4 \end{aligned}$$

つまり, 求める曲線の長さは 4 である。