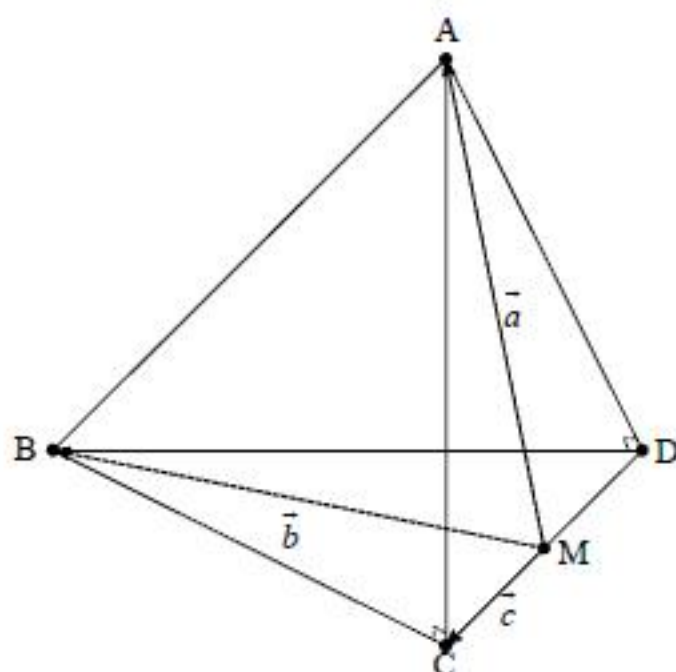




条件より,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \\ \overline{DA} \cdot \overline{DB} = 0 \\ \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0 \end{array} \right\} (*)$$

である。ここで,

$$\overline{MA} = \vec{a}, \quad \overline{MB} = \vec{b}, \quad \overline{MC} = \vec{c}$$

と置くと,

$$\overline{MD} = -\vec{c}$$

である。(*)は上からそれぞれ、次の①、②、③となる。

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

①より,

$$|\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \dots \textcircled{4}$$

②より,

$$|\vec{c}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \dots \textcircled{5}$$

⑤-④より,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad \dots \textcircled{6}$$

③より,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad \dots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦より,

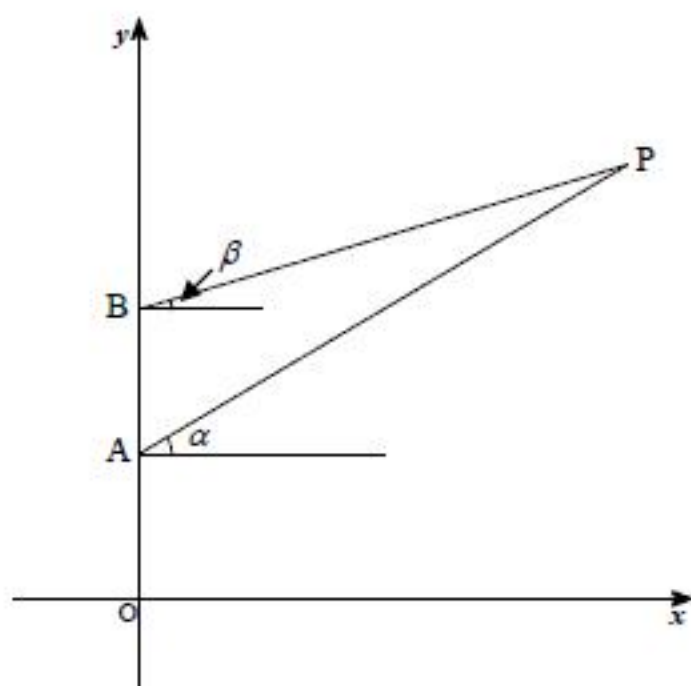
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

である。すなわち,

$$\overline{MA} \perp \overline{MC}, \quad \overline{MB} \perp \overline{MC}$$

したがって、平面 $\overline{ABM} \perp \overline{MC}$ 、すなわち、平面 $\overline{ABM} \perp \overline{CD}$ が示された。

(証明終)



x 軸の正の方向から、 $\overline{AP}$ 、 $\overline{BP}$ へ測った角をそれぞれ α 、 β とすると、 $x > 0$ より、

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

としてよく、

$$\tan \alpha = (\text{直線 AP の傾き}) = \frac{x-1}{x} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\tan \beta = (\text{直線 BP の傾き}) = \frac{x-2}{x} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 $\triangle ABP$ において、

$$\angle BAP = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \angle ABP = \frac{\pi}{2} + \beta$$

であるので、

$$\begin{aligned} \angle APB &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \\ &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

である。ここで、 $P(x, x)$ より、 P は直線 $y = x$ 上にある。よって、点 P は AB を直径とする円の外部にある。したがって、

$$0 < \angle APB < \frac{\pi}{2}$$

である。ゆえに、 $\tan \angle APB$ の最大値を求めればよい。①、②を用いて、

$$\begin{aligned} \tan \angle APB &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x}}{1 + \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}} \\ &= \frac{x}{2x^2 - 3x + 2} \\ &= \frac{1}{2x + \frac{2}{x} - 3} \end{aligned}$$

となる。 $x > 0$ より、相加・相乗平均の関係から、

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x} &\geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{2}{x}} \\ \Leftrightarrow 2x + \frac{2}{x} &\geq 4 \end{aligned}$$

であり、等号は

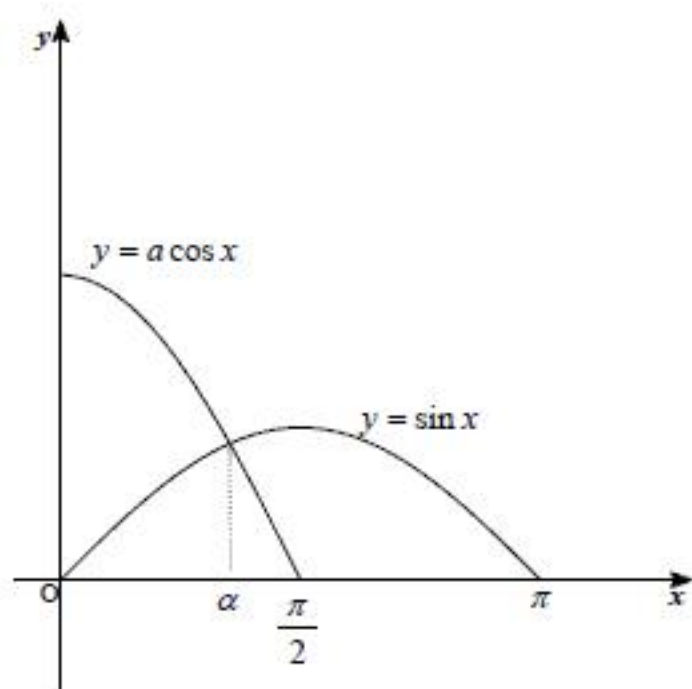
$$\begin{aligned} 2x &= \frac{2}{x} \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

のとき成立する。したがって、

$$2x + \frac{2}{x} - 3 \geq 1 \quad (\text{等号成立は } x = 1 \text{ のとき})$$

であるから、 $x = 1$ のとき、 $\tan \angle APB$ は最大値 1 をとる。

ゆえに、 $\angle APB$ の最大値は $\frac{\pi}{4}$ である。



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。 $y = \sin x$ と $y = a \cos x$ は、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において、1 点で交わり、その交点の x 座標を α とすると、

$$\sin \alpha = a \cos \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また、

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\alpha} \sin x dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx \\ &= [-\cos x]_0^{\alpha} + [a \sin x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos \alpha + 1 + a(1 - \sin \alpha) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$S : T = 3 : 1$$

より、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} S \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$-\cos \alpha + 1 + a(1 - \sin \alpha) = \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。以上より、①、②を満たす a ($a > 0$) を求めればよい。①より、

$$a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

を②に代入して、

$$\begin{aligned} -\cos \alpha + 1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (1 - \sin \alpha) &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow -\cos^2 \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha - \sin^2 \alpha &= \frac{2}{3} \cos \alpha \\ \Leftrightarrow 3 \sin \alpha + \cos \alpha &= 3 \end{aligned}$$

である。これと、

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

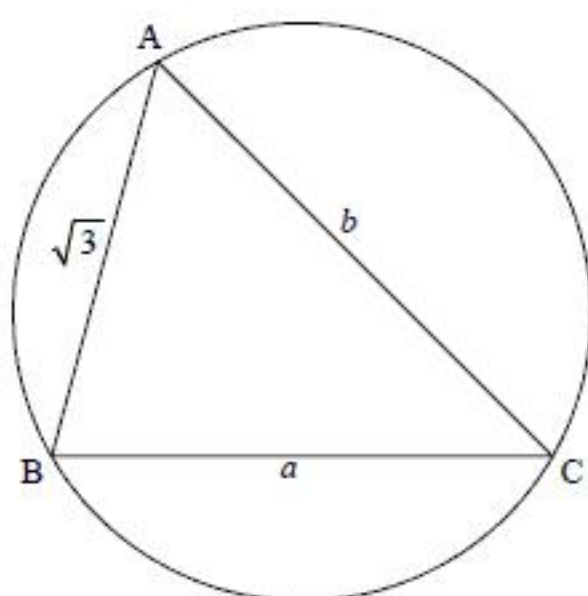
より、

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

である。したがって、①より、

$$a = \frac{4}{3}$$

である。



頂点を A, B, C とし、

$$AB = \sqrt{3}, \quad BC = a, \quad CA = b$$

とする。正弦定理より、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C} = 2 \cdot 1$$

である。よって、

$$a = 2 \sin A \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b = 2 \sin B \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。③と $\triangle ABC$ が鋭角三角形より、

$$C = \frac{\pi}{3}$$

である。したがって、

$$A + B = \frac{2}{3}\pi$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{2}{3}\pi - A$$

である。これと②より、

$$\begin{aligned} b &= 2 \sin \left(\frac{2}{3}\pi - A \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right) \end{aligned}$$

である。ところで、①より、

$$\sin A = \frac{a}{2}$$

である。また、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形より、

$$\begin{aligned} \cos A &= \sqrt{1 - \sin^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2} \end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} b &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{12 - 3a^2} + a}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{\sqrt{12 - 3a^2} + a}{2}$$

(1)

命題「 $3^{2^n} - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない」ことを、 n についての数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき、

$$\begin{aligned} 3^{2^1} - 1 &= 9 - 1 \\ &= 8 \\ 2^{1+2} &= 8 \\ 2^{1+3} &= 16 \end{aligned}$$

より、命題は成立する。

[2] $n=k$ のとき、命題の成立を仮定すると、

$$3^{2^k} - 1 = x_k \cdot 2^{k+2} \quad (x_k \text{ は奇数})$$

と表すことができる。このとき、

$$\begin{aligned} 3^{2^{k+1}} - 1 &= (3^{2^k})^2 - 1 \\ &= (x_k \cdot 2^{k+2} + 1)^2 - 1 \\ &= x_k^2 \cdot 2^{2k+4} + 2x_k \cdot 2^{k+2} \\ &= (x_k^2 \cdot 2^{k+1} + x_k) \cdot 2^{k+3} \end{aligned}$$

である。ここで、 $x_k^2 \cdot 2^{k+1}$ は偶数で、 x_k は奇数より、 $x_k^2 \cdot 2^{k+1} + x_k$ は奇数である。よって、命題は $n=k+1$ のときも成立する。

以上[1], [2]より、命題はすべての正の整数 n で成立する。

(証明終)

(2)

$$m = p \cdot 2^q \quad (p \text{ は } 1 \text{ 以上の奇数, } q \text{ は } 1 \text{ 以上の整数})$$

と置くことができる。このとき、

$$\begin{aligned} 3^m - 1 &= 3^{p \cdot 2^q} - 1 \\ &= (3^{2^q})^p - 1 \end{aligned}$$

である。

[1] $p \geq 3$ のとき

$$3^{2^q} = y$$

と置くと、

$$\begin{aligned} 3^m - 1 &= y^p - 1 \\ &= (y-1)(y^{p-1} + y^{p-2} + \cdots + y + 1) \end{aligned}$$

である。

$$y^{p-1} + y^{p-2} + \cdots + y + 1 = Y_p$$

と置くと、 y は奇数より、 Y_p は p 個の奇数

$$y^{p-1}, y^{p-2}, \dots, y, 1$$

の和である。また、 p は奇数である。したがって、 Y_p は奇数である。

すなわち、

$$3^m - 1 = Y_p (3^{2^q} - 1) \quad (Y_p \text{ は奇数})$$

と書ける。

[2] $p=1$ のとき

$$3^m - 1 = 3^{2^q} - 1$$

である。

以上[1], [2]より、 p が1以上の奇数のとき、

$$3^m - 1 = Y_p (3^{2^q} - 1) \quad (Y_p \text{ は奇数})$$

と書ける。(1)より、 $3^{2^q} - 1$ に含まれる素因数2は全部で $q+2$ 個である。

ゆえに、

$$3^m - 1 \text{ が } 2^m \text{ で割り切れる} \Leftrightarrow q+2 \geq m \Leftrightarrow q+2 \geq p \cdot 2^q \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

[i] $q=1$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 3 \geq 2p$$

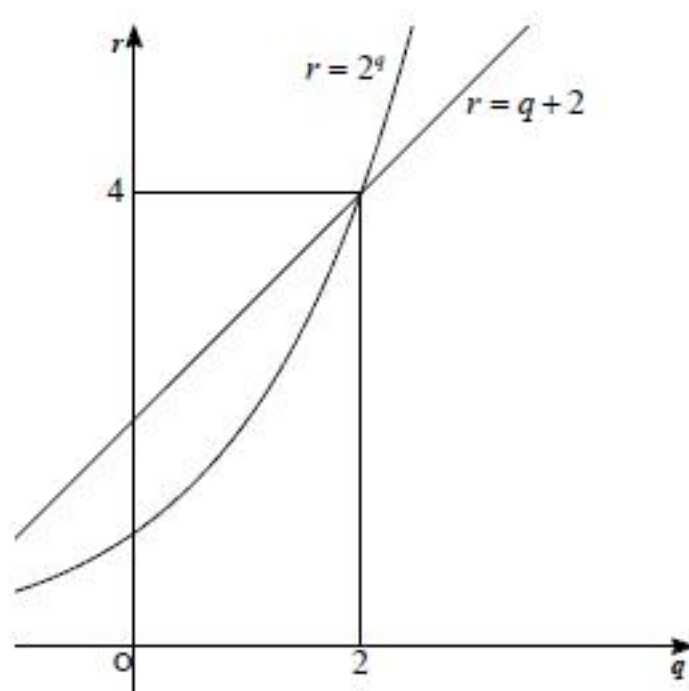
より、 $p=1$ となり、 $m=2$ である。

[ii] $q=2$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 4 \geq 4p$$

より、 $p=1$ となり、 $m=4$ である。

[iii] $q \geq 3$ のとき



上図より、

$$q+2 < 2^q$$

である。また、 $p \geq 1$ より、

$$2^q \leq p \cdot 2^q$$

である。よって、

$$q+2 < p \cdot 2^q$$

となり、 $\textcircled{1}$ は成り立たない。

以上[i]~[iii]より、

$$m = 2, 4$$

となり、題意は示された。

(証明終)

n 個のボールそれぞれと $2n$ 個の箱それぞれを区別して考える。
入れ方の総数を N とすると、

$$N = (2n)^n$$

であり、この N 通りは同様に確からしい。

次に、どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない場合の数を N_1 通りとする。

ボールは、ボールが 1 つも入っていない箱から 1 つを選んで入れることができるので、

$$\begin{aligned} N_1 &= 2n \cdot (2n-1) \cdots \{2n-(n-1)\} \\ &= 2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+n) \end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{N_1}{N} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+n)}{(2n)^n} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \log p_n &= \sum_{k=1}^n \log(n+k) - n \log(2n) \\ &= \sum_{k=1}^n \log n \left(1 + \frac{k}{n}\right) - n(\log 2 + \log n) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \log n + \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right\} - n(\log 2 + \log n) \\ &= \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) - n \log 2 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) - \log 2 \right\} \\ &= \int_0^1 \log(1+x) dx - \log 2 \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 - \log 2 \\ &= (2 \log 2 - 1) - \log 2 \\ &= \log 2 - 1 \end{aligned}$$

である。