

平成 22 年度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系・乙)

200 点満点

《配点は、学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある。
3. 問題は全部で 6 題ある(1 ページから 2 ページ)。
4. 筆答開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙にはこれら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いてもよい。この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、計算用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページに書くこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は、無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(35 点)

四面体 ABCD において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする. このとき, 頂点 A, 頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ.

2

(35 点)

x を正の実数とする. 座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり, $\triangle APB$ を考える. x の値が変化するとき, $\angle APB$ の最大値を求めよ.

3

(35 点)

a を正の実数とする. 座標平面において曲線 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし, 曲線 $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 曲線 $y = a \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする. このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ.

4

(35 点)

$1 < a < 2$ とする. 3 辺の長さが $\sqrt{3}$, a , b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする. このとき a を用いて b を表せ.

5

(30 点)

次の問に答えよ.

- (1) n を正の整数, $a = 2^n$ とする. $3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ.
- (2) m を正の偶数とする. $3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ.

6

(30 点)

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる. 各ボールはいずれかの箱に入るものとし, どの箱に入る確率も等しいとする. どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする. このとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ.

問題は、このページで終わりである.