

1

(1) AD は $\angle A$ の二等分線であるから,

$$BD:DC = AB:AC = 12:10 \\ = 6:5$$

$$\text{よって, } BD = \frac{6}{6+5} BC = \frac{6}{11} \cdot 11 = 6$$

$\angle ABC = \theta$ とおくと, $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて,

$$10^2 = 12^2 + 11^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11 \cos \theta$$

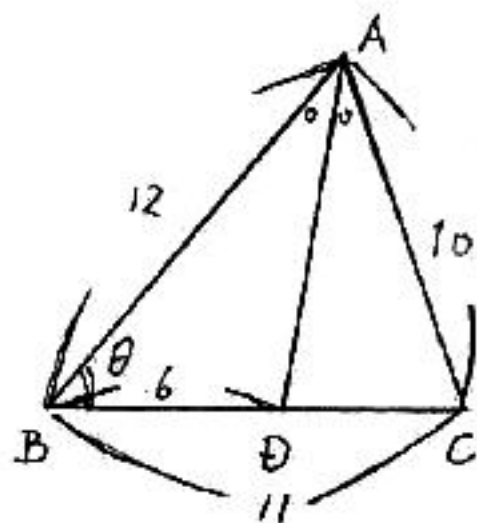
$$\cos \theta = \frac{5}{8}$$

次に, $\triangle ABD$ に余弦定理を用いて,

$$AD^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos \theta = 180 - 90 = 90$$

よって,

$$AD = \underline{\underline{3\sqrt{10}}}$$



(2) X の取り得る値は $1, 2, \dots, 8$ である.

$X = k$ ($1 \leq k \leq 8$) とする確率 p_k を求める. 2枚のカードの選び方は $9C_2$ 通りで,

そのうち, $X = k$ とするものは $(k, k+1), \dots, (k, 9)$ の $9-k$ 通り. よって,

$$p_k = \frac{9-k}{9C_2}$$

Y についても X と同様で, $Y = k$ とする確率は p_k .

また, 1回目と2回目の試行は独立である.

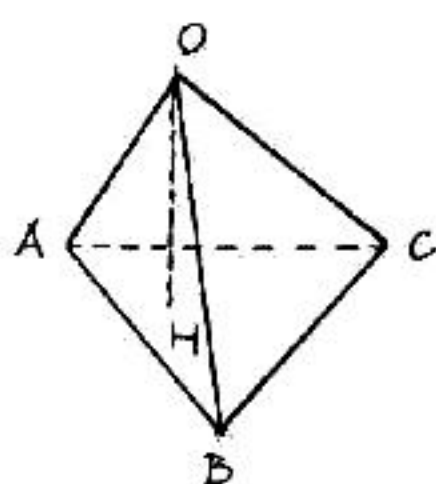
よって, $X = Y = k$ とする確率は,

$$p_k^2 = \left(\frac{9-k}{9C_2} \right)^2 \quad (1 \leq k \leq 8)$$

したがって, $X = Y$ とする確率は,

$$\sum_{k=1}^8 \left(\frac{9-k}{9C_2} \right)^2 = \sum_{k=1}^8 \left(\frac{k}{9C_2} \right)^2 = \frac{1}{36^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot (8+1) \cdot (2 \cdot 8 + 1) = \underline{\underline{\frac{17}{108}}}$$

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とする。条件から、



$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 & \cdots ① \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 & \cdots ② \\ |\vec{a}| = 2 & \cdots ③ \\ |\vec{b}| = |\vec{c}| = 3 & \cdots ④ \\ |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{7} & \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤より、 $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 7$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 7$$

$$9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 7 \quad (③④より)$$

よって、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

①と②より、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 3$$

以上より、

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = |\vec{c}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 3, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \cdots ⑥$$

点Hは平面ABC上にあるから、実数 k, l, m を用いて、

$$\begin{cases} \vec{OH} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} & \cdots ⑦ \\ k + l + m = 1 & \cdots ⑧ \end{cases}$$

と表せる。

$OH \perp$ 平面ABC から

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \cdots ⑨ \quad \text{かつ} \quad \vec{OH} \cdot \vec{AC} = 0 \quad \cdots ⑩$$

⑨に⑦を代入して、

$$(k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$k\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + l\vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + m\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

⑥を用いて、

$$-k + 6l - 3m = 0 \quad \cdots ⑨'$$

⑩に⑦を代入して、

$$(k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

⑥を用いて、

$$-k - 3l + 6m = 0 \quad \cdots ⑩'$$

⑨'⑩'を解いて、

$$k = \frac{3}{5}, \quad l = m = \frac{1}{5}$$

よって、⑦より、

$$\vec{OH} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$$

よって、

$$\begin{aligned} |\vec{OH}|^2 &= \frac{1}{25} |3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{25} (9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 6\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{25} (36 + 9 + 9 + 18 + 0 + 18) \quad (⑥より) \\ &= \frac{90}{25} \end{aligned}$$

よって、

$$|\vec{OH}| = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$y = x^3 - 4x^2 + 6x$ と $y = x + a$ のグラフの交点の個数は,

$$x^3 - 4x^2 + 6x = x + a$$

移項して, $x^3 - 4x^2 + 5x = a$

の異なる実数解の個数に等しい。さらに、これは,

$y = x^3 - 4x^2 + 5x$ と $y = a$ のグラフの交点の個数に等しい。

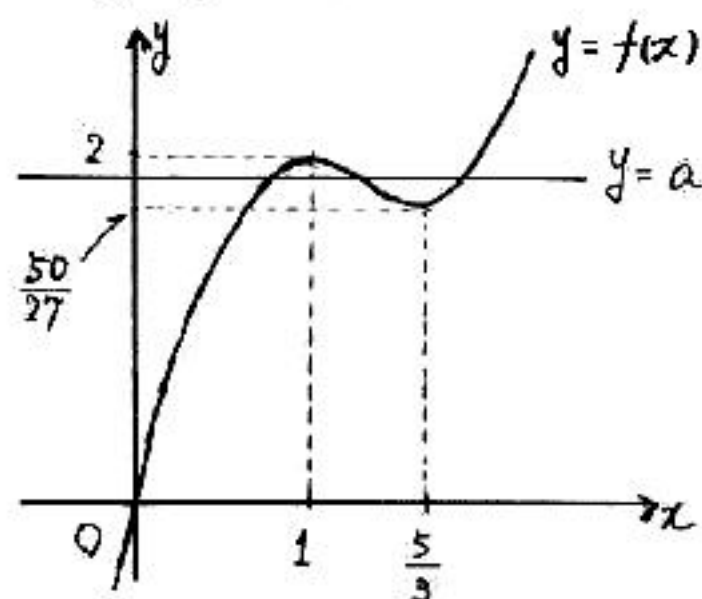
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$ とおくと,

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = (3x - 5)(x - 1)$$

より, $f(x)$ の増減は: 2 表のようになる。

x	----	1	----	$\frac{5}{3}$	----
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

よって, $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



ゆえに, 求める交点の個数は,

$$\begin{cases} a > 2, & a < \frac{50}{27} \text{ のとき,} & 1 \text{ 個} \\ a = 2, & a = \frac{50}{27} \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ \frac{50}{27} < a < 2 \text{ のとき,} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

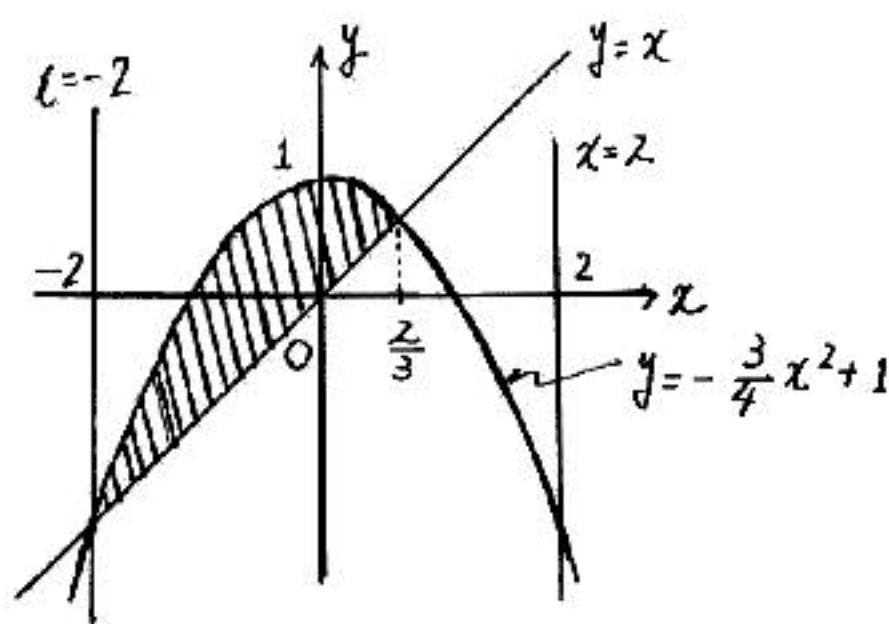
$|x| \leq 2$, したがって, $-2 \leq x \leq 2$ の下に考えられる。このとき,

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2 &= \frac{3}{4}|x^2 - 4| - 2 \\ &= \frac{3}{4}(-x^2 + 4) - 2 \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + 1 \end{aligned}$$

次に, $-\frac{3}{4}x^2 + 1 = x$ を解くと,

$$3x^2 + 4x - 4 = 0 \iff (3x - 2)(x + 2) = 0 \iff x = \frac{2}{3}, -2$$

よって, 与えられた連立不等式を満たす領域は, 下図の斜線部分(境界も含む)である。



したがって, 求める面積は,

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left\{ \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1 \right) - x \right\} dx \\ &= \frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left\{ -\left(x - \frac{2}{3} \right)(x + 2) \right\} dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \left\{ \frac{2}{3} - (-2) \right\}^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{64}{27}}} \end{aligned}$$

(1) n を $1, 2, \dots, n$ とする.

10^{k-1} の位が 1 の整数は 2^{n-1} 個あり, 10^{k-1} の位が 2 の整数は 2^{n-1} 個ある.

したがって,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \{ (1 \cdot 10^{k-1}) \cdot 2^{n-1} + (2 \cdot 10^{k-1}) \cdot 2^{n-1} \} \\ &= \sum_{k=1}^n 3 \cdot 10^{k-1} \cdot 2^{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1-10^n}{1-10} \\ &= \underline{\underline{\frac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}}} \end{aligned}$$

(2) $n-1$ 桁以下の整数については, その整数の桁数を l としたとき,

$10^{n-1}, 10^{n-2}, \dots, 10^0$ の位の数をすべて 0

と考え, n 桁の整数として扱うことにする.

$k=1, 2, \dots, n$ とする. 10^{k-1} の位が 0 の整数は 3^{n-1} 個あり, 10^{k-1} の位が 1 の整数は 3^{n-1} 個あり, 10^{k-1} の位が 2 の整数は 3^{n-1} 個ある. したがって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{ (0 \cdot 10^{k-1}) \cdot 3^{n-1} + (1 \cdot 10^{k-1}) \cdot 3^{n-1} + (2 \cdot 10^{k-1}) \cdot 3^{n-1} \} \\ &= \sum_{k=1}^n 3 \cdot 10^{k-1} \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^n \cdot \frac{1-10^n}{1-10} \\ &= \frac{3^n(10^n-1)}{9} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} S_n &\geq 15 T_n \\ \Leftrightarrow \frac{3^n(10^n-1)}{9} &\geq 15 \cdot \frac{2^{n-1}(10^n-1)}{3} \\ \Leftrightarrow 3^{n-2} &\geq 5 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} &\geq 10 \\ \Leftrightarrow (n-2) \log_{10} \frac{3}{2} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow n &\geq 2 + \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

よって, $\log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$

$$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478, \quad 0.301 < \log_{10} 2 < 0.302 \quad \text{より}$$

$$0.477 - 0.302 < \log_{10} \frac{3}{2} < 0.478 - 0.301$$

すなわち,

$$0.175 < \log_{10} \frac{3}{2} < 0.177$$

$$\frac{1000}{177} < \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} < \frac{1000}{175}$$

であり,

$$7 + \frac{115}{177} < 2 + \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} < 7 + \frac{125}{175}$$

よって, n は正の整数であるから,

$$\text{①} \Leftrightarrow n \geq 8$$

すなわち, n が 8 以上のとき