

(1) X の取り得る値は $1, 2, \dots, 8$ である。

$X = k (1 \leq k \leq 8)$ とする確率 p_k を求める。2枚のカードの選び方は $9C_2$ 通りで、
 そのうち、 $X = k$ とするものは $(k, k+1), \dots, (k, 9)$ の $9-k$ 通り。よって、

$$p_k = \frac{9-k}{9C_2}$$

Y についても X と同様で、 $Y = k$ とする確率は p_k 。

また、1回目と2回目の試行は独立である。

よって、 $X = Y = k$ とする確率は、

$$p_k^2 = \left(\frac{9-k}{9C_2} \right)^2 \quad (1 \leq k \leq 8)$$

よって、 $X = Y$ とする確率は、

$$\sum_{k=1}^8 \left(\frac{9-k}{9C_2} \right)^2 = \sum_{k=1}^8 \left(\frac{k}{9C_2} \right)^2 = \frac{1}{36^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot (8+1) \cdot (2 \cdot 8 + 1) = \underline{\underline{\frac{17}{108}}}$$

(2) $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$

x	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x+1) \sqrt{1-2x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + 1 \right) \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + 1 \right) \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{16} \pi}} \end{aligned}$$

i) かつ、

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} a+2=1 & \text{--- ①} \\ b+2c=2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

ii) かつ、

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ より, } A(a, b)$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \text{ より, } B(1, c)$$

よって, $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} |ac-b|$ であるから,

$$\frac{1}{2} |ac-b| = \frac{1}{2}$$

$$|ac-b| = 1 \quad \text{--- ③}$$

①②③を連立して解く,

$$\text{①より, } a = -1$$

$$\text{②より, } b = 2-2c$$

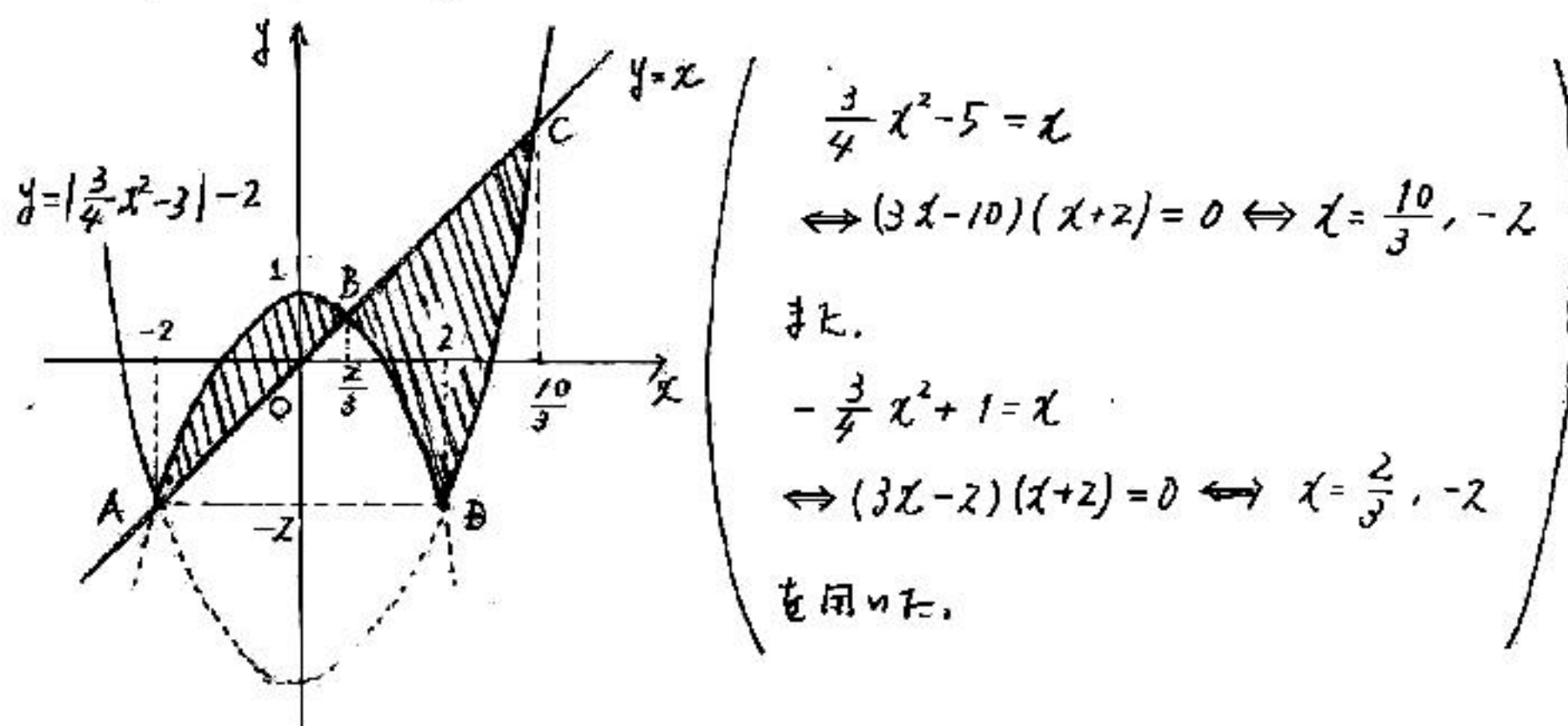
$$\text{これを③に代入して, } |c-2| = 1$$

$$c = 1, 3$$

$$\text{よって, } \underline{\underline{(a, b, c) = (-1, 0, 1), (-1, -4, 3)}}$$

$$y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2 = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2 - 5 & (x \leq -2, x \geq 2 \text{ かつ}) \\ -\frac{3}{4}x^2 + 1 & (-2 < x < 2 \text{ かつ}) \end{cases}$$

よって, $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$, $y = x$ のグラフは下図のようになる。



$$\frac{3}{4}x^2 - 5 = x$$

$$\Leftrightarrow (3x - 10)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}, -2$$

また,

$$-\frac{3}{4}x^2 + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}, -2$$

を用いた,

これから, 求める面積をSとすると, Sは上図の斜線部分の面積であり,

図の4点A, B, C, Dを用いると,

$$\begin{aligned} S &= \text{Area of region ABCD} + 2 \times \text{Area of region ADB} - 2 \times \text{Area of region ADB} \\ &= \int_{-2}^{\frac{10}{3}} \left\{ x - \left(\frac{3}{4}x^2 - 5 \right) \right\} dx + 2 \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left\{ \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1 \right) - x \right\} dx \\ &\quad - 2 \int_{-2}^2 \left\{ \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1 \right) - (-2) \right\} dx \\ &= \frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{10}{3}} \left\{ -\left(x - \frac{10}{3} \right)(x + 2) \right\} dx + 2 \cdot \frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left\{ -\left(x - \frac{2}{3} \right)(x + 2) \right\} dx \\ &\quad - 2 \cdot \frac{3}{4} \int_{-2}^2 \left\{ -\left(x - 2 \right)(x + 2) \right\} dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \left\{ \frac{10}{3} - (-2) \right\}^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} \left\{ \frac{2}{3} - (-2) \right\}^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} \left\{ 2 - (-2) \right\}^3 \\ &= \frac{208}{27} \end{aligned}$$

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}}\right) \quad (n=2, 3, 4, \cdots) \quad \cdots (*)$$

を、 n についての数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=2$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2) = (1-a_1) - (1-a_1)a_2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と仮定し、 $\frac{1}{2} < a_1 < 1$ より、 $0 < 1-a_1 < \frac{1}{2}$ 。また、 $a_2 > 0$

$$\text{よって、} (1-a_1)a_2 < \frac{1}{2}a_2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①②より、

$$(1-a_1)(1-a_2) > (1-a_1) - \frac{1}{2}a_2$$

すなわち、 $(1-a_1)(1-a_2) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right)$ となり、(*)は $n=2$ のとき成り立つ。

(ii) $n=k$ (k は 2 以上の整数) のとき (*) が成り立つと仮定して、

$n=k+1$ のときを考える。

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1}) = A \text{ とおくと、}$$

$$A = \underbrace{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)}_{\text{③の左辺}} - \underbrace{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)a_{k+1}}_{\text{③の右辺}} \quad \cdots \textcircled{3}$$

③の左辺の部分に仮定を用いると、

$$A > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right) - \underbrace{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)a_{k+1}}_{\text{④の左辺}} \quad \cdots \textcircled{4}$$

④の左辺の部分について、

$$\frac{1}{2} < a_j < 1 \text{ より、} 0 < 1-a_j < \frac{1}{2} \quad (j=1, 2, \cdots, k) \text{。また、} a_{k+1} > 0$$

$$\text{よって、} \underbrace{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)a_{k+1}}_{\text{④の右辺}} < \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k+1} \quad \cdots \textcircled{5}$$

④⑤より、

$$A > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k+1}$$

$$\text{すなわち、} A > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k}\right) \text{ となり、}$$

(*) は $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上 (i), (ii) より、(*) は成り立つ。 ■

平面 α は x 軸上の点 $(4, 0, 0)$, y 軸上の点 $(0, 4, 0)$, z 軸上の点 $(0, 0, 4)$ を通るので, その方程式は,

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1, \text{ すなわち, } x + y + z - 4 = 0$$

よって, 球面 S の中心 $O(0, 0, 0)$ と平面 α の距離を d とすると,

$$d = \frac{|0+0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

であり,

$$d - \sqrt{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}(\sqrt{8} - \sqrt{9}) < 0$$

よって, $d < (\text{球面 } S \text{ の半径 } \sqrt{6})$

よって, 球面 S と平面 α は 共有点をもつ ■

よって, 実数 x, y, z が,

$$x + y + z = 4 \quad \text{--- ①} \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{--- ②}$$

を満たすとき, xyz の取り得る値の範囲を求めよ。

恒等式 $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ を用いると,

$$\text{①かつ②} \Leftrightarrow \text{①かつ } xy + yz + zx = 5$$

である。よって,

xyz の値を k とする。

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 & \text{--- ①} \\ xy + yz + zx = 5 & \text{--- ③} \\ xyz = k & \text{--- ④} \end{cases} \quad \text{を同時に満たす実数 } x, y, z \text{ が存在する}$$

よって, ①③④より, x, y, z は, t の3次方程式

$$t^3 - 4t^2 + 5t - k = 0 \quad \text{--- ⑤}$$

の解である。

よって,

⑤が3つの実数解(重解の場合も含む)をもつような k の値の範囲

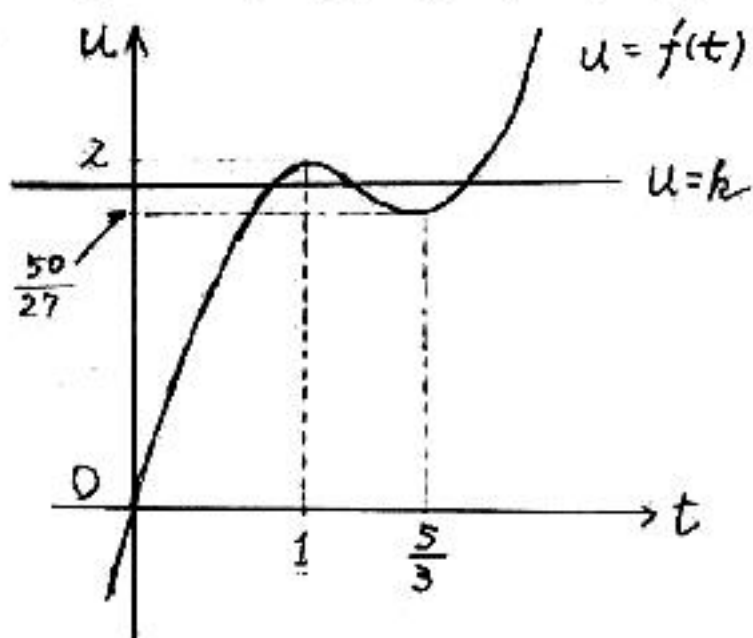
を求めよ。ここに,

$$\text{⑤} \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + 5t = k$$

である。 $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ とおくと,

$$f'(t) = 3t^2 - 8t + 5 = (3t - 5)(t - 1)$$

よって, $u = f(t)$ のグラフは 下図のようになる。



ゆえに, k の値の範囲は $\frac{50}{27} \leq k \leq 2$

よって, xyz の取り得る値の範囲は $\frac{50}{27} \leq xyz \leq 2$

三角形ABCの外心を P_0 とし、点 P_0 を通り平面ABCに垂直な直線を l とする。
 l 上の任意の点 P に対して、

$$\begin{cases} PA^2 = AP_0^2 + P_0P^2 \\ PB^2 = BP_0^2 + P_0P^2 \\ PC^2 = CP_0^2 + P_0P^2 \end{cases}$$

であり、 $AP_0 = BP_0 = CP_0 \neq 0$ であるから

$$PA = PB = PC \neq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

次に、線分ADの中点Mを通り、ADに垂直な平面を α とする。 α 上の任意の点Qに対して、

$$\begin{cases} QA^2 = AM^2 + MQ^2 \\ QD^2 = DM^2 + MQ^2 \end{cases}$$

であり、 $AM = MD \neq 0$ であるから、

$$QA = QD \neq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

よって、四面体ABC $\bar{D}$ より、

点Dは平面ABC上にない

から、

平面 $\alpha \times$ 直線 l

である。したがって、 α と l は交点Oをもつ。

$$\begin{cases} \text{点Oは} l \text{上にあるから、} \textcircled{1} \text{より、} OA = OB = OC \neq 0 \\ \text{点Oは} \alpha \text{上にあるから、} \textcircled{2} \text{より、} OA = OD \neq 0 \end{cases}$$

すなわち、 $OA = OB = OC = OD \neq 0$ である。

したがって、4点A, B, C, Dを同時に通る球面として、

点Oを中心とし、半径がOAの球面が存在する。

