

1

(1) 2 曲線の交点の x 座標を求める.

$$x^4 = x^2 + 2$$

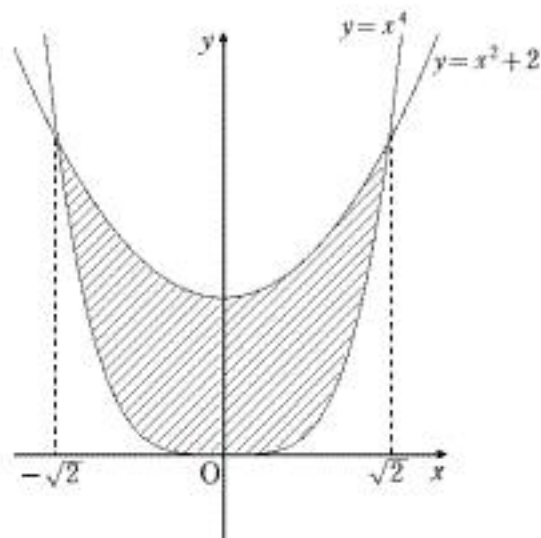
$$(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0$$

よって, $x = \pm\sqrt{2}$

また, 図形は y 軸対称である.

よって, 求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \{(x^2 + 2) - x^4\} dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{5} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{56\sqrt{2}}{15}}} \end{aligned}$$



(2) $2n$ 枚の札をすべて区別して考える.

3 枚の取り出し方は全部で,

$$2n(2n-1)(2n-2) = 4n(2n-1)(n-1) \text{ (通り)}$$

あり, これらは同様に確からしい.

次に, $X_1 < X_2 < X_3$ となる取り出し方は, 同じ番号の札が 2 枚ずつあるから,

$${}_n C_3 \times 2^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times 2^3 = \frac{4n(n-1)(n-2)}{3} \text{ (通り)}$$

ある,

よって, 求める確率は,

$$\frac{\frac{4n(n-1)(n-2)}{3}}{4n(2n-1)(n-1)} = \underline{\underline{\frac{n-2}{3(2n-1)}}}$$

正四面体の1辺の長さを a とすると,

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = a, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

次に, $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC}$ ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $0 < r < 1$) と表せる.

$\triangle PQR$ は正三角形であるから,

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RP}|$$

すなわち,

$$|q\overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OA}| = |r\overrightarrow{OC} - q\overrightarrow{OB}| = |p\overrightarrow{OA} - r\overrightarrow{OC}|$$

辺々を2乗して, ①を用いると,

$$(p^2 + q^2 - pq)a^2 = (q^2 + r^2 - qr)a^2 = (r^2 + p^2 - rp)a^2$$

$a \neq 0$ を用いて,

$$\begin{cases} p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr & \dots \textcircled{2} \\ q^2 + r^2 - qr = r^2 + p^2 - rp & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

②について

$$\begin{aligned} (p^2 - r^2) - q(p - r) &= 0 \\ (p - r)(p - q + r) &= 0 & \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③について

$$\begin{aligned} (q^2 - p^2) - r(q - p) &= 0 \\ (q - p)(q - r + p) &= 0 & \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

ここで, $p \neq r$ と仮定すると, ④より,

$$\begin{aligned} p - q + r &= 0 \\ q &= p + r & \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

⑥を⑤に代入して,

$$\begin{aligned} \{(p+r) - p\} \{(p+r) - r + p\} &= 0 \\ r \cdot 2p &= 0 \end{aligned}$$

これは, $r \neq 0$, $p \neq 0$ に反する. よって, $p = r$

このとき, ⑤は,

$$(q - p)q = 0$$

となる. これと, $q \neq 0$ より, $q - p = 0$

以上より, $p = q = r$ であり,

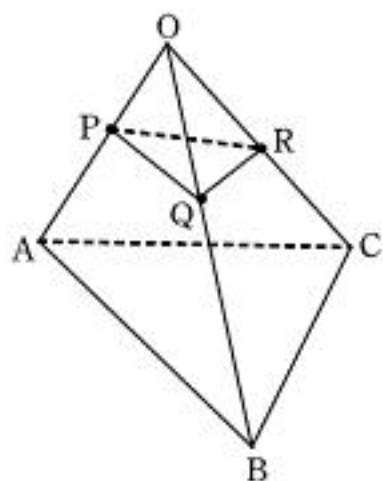
$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = p\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = p\overrightarrow{OC}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= p\overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OA} = p\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{QR} &= p\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OB} = p\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{RP} &= p\overrightarrow{OA} - p\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{CA} \end{aligned}$$

すなわち,

3 辺 PQ , QR , RP は, それぞれ辺 AB , BC , CA に平行である. ■



$x+y=\alpha$, $xy=\beta$ とおく.

条件 $x^2+xy+y^2=6$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}(x+y)^2-xy &= 6 \\ \alpha^2-\beta &= 6 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

また, x, y は t の 2 次方程式 $t^2-\alpha t+\beta=0$ の解であり, x, y は実数であるから,

$$\alpha^2-4\beta=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①②より, β を消去すると,

$$\begin{aligned}\alpha^2-4(\alpha^2-6) &\geq 0 \\ \alpha^2 &\leq 8 \\ -2\sqrt{2} &\leq \alpha \leq 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}& x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \\ &= xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y) \\ &= \beta\alpha-\alpha^2+\alpha \\ &= (\alpha^2-6)\alpha-\alpha^2+\alpha \quad (\textcircled{1} \text{より}) \\ &= \alpha^3-\alpha^2-5\alpha\end{aligned}$$

以上より,

「 $-2\sqrt{2} \leq \alpha \leq 2\sqrt{2}$ のとき, $\alpha^3-\alpha^2-5\alpha$ のとり得る値の範囲」
を求めればよい. $\alpha^3-\alpha^2-5\alpha=f(\alpha)$ とおくと,

$$f'(\alpha)=3\alpha^2-2\alpha-5=(3\alpha-5)(\alpha+1)$$

したがって, $f(\alpha)$ の増減表は次のようになる.

α	$-2\sqrt{2}$	$\dots$	-1	$\dots$	$\frac{5}{3}$	$\dots$	$2\sqrt{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

また,

$$\begin{cases} f(-2\sqrt{2}) = -8-6\sqrt{2} \\ f(-1) = 3 \\ f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{175}{27} \\ f(2\sqrt{2}) = -8+6\sqrt{2} \end{cases}$$

さらに, $3 > -8+6\sqrt{2}$, $-8-6\sqrt{2} < -\frac{175}{27}$

よって, とり得る値の範囲は,

$$\underline{\underline{-8-6\sqrt{2} \leq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leq 3}}$$

(p): 正しい

[証明]

正 n 角形に外接する円の中心を O とし、
三角形の頂点を A, B, C とする.

$\angle BAC = 60^\circ$ としてもよい. 円周角と
中心角の関係により,

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$$

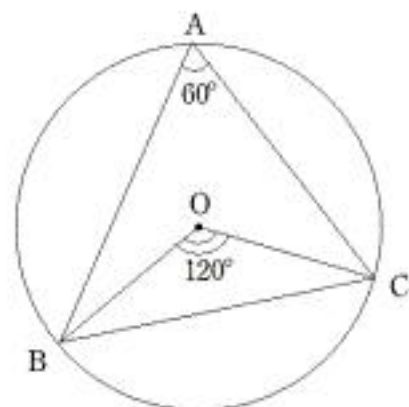
また, 2 点 B, C は正 n 角形の頂点であるから,

$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{n} \times k \quad (k \text{ は正の整数})$$

と表せる.

$$\text{以上より, } 120^\circ = \frac{360^\circ}{n} k \Leftrightarrow n = 3k$$

すなわち, n は 3 の倍数である. ■



(q): 正しくない

[説明]

$A = A', B = B'$ とする.

点 B を中心とし, 半径が BA より小さい円 K
を描く.

次に, 点 A を通り, 円 K と異なる 2 点で
交わる直線 l を引く.

(ただし, l は点 B を通らない.)

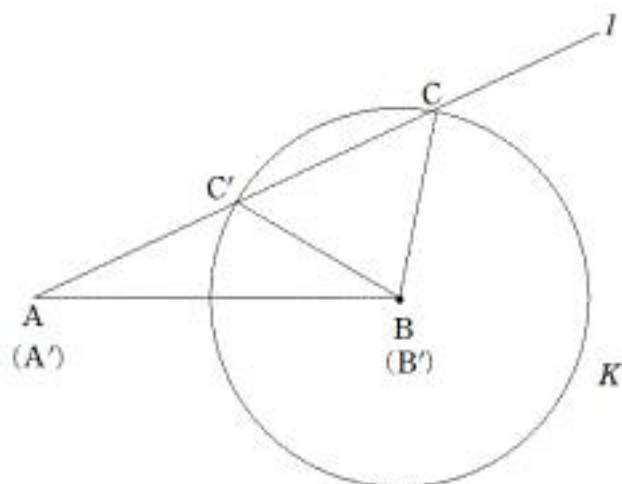
K と l の 2 つの交点を C, C' とする.

このとき, $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において

$AB = A'B', BC = B'C', \angle A = \angle A'$ は成り立つが,

2 つの三角形は合同ではなく,

これが反例であり, (q) は正しくない.



$$\cos a\theta = \cos b\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$a = b$ のとき, ①は任意の θ で成り立つから, (*) を満たさない,

(i) $0 < b < a$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a\theta = b\theta + 2m\pi, \text{ または, } a\theta = -b\theta + 2n\pi \quad (m, n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{2m}{a-b}\pi \quad \dots \textcircled{2}, \text{ または, } \theta = \frac{2n}{a+b}\pi \quad \dots \textcircled{3}$$

②のうち, 正の解を小さい順に並べると,

$$\theta = \frac{2}{a-b}\pi, \frac{4}{a-b}\pi, \frac{6}{a-b}\pi, \dots$$

③のうち, 正の解を小さい順に並べると,

$$\theta = \frac{2}{a+b}\pi, \frac{4}{a+b}\pi, \frac{6}{a+b}\pi, \dots$$

これらのうち, 最小のものは, $\frac{2}{a+b}\pi$

よって,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{2}{a+b}\pi \leq \pi \\ \pi < \frac{4}{a+b}\pi \\ \pi < \frac{2}{a-b}\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq a+b < 4 \\ a-b < 2 \end{cases}$$

(ii) $0 < a < b$ のとき

①は a と b に関して対称であるから, (i) での a と b を入れ替えることにより,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq a+b < 4 \\ a-b < 2 \end{cases}$$

以上より, (a, b) の範囲は,

$$\begin{cases} 0 < b < a \\ 2 \leq a+b < 4 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} 0 < a < b \\ 2 \leq a+b < 4 \\ b < a+2 \end{cases}$$

また, 図示すると, 右の図の斜線部分となる.

- 境界線のうち, 実線は含み, 点線は含まない.
- 2点 $(2, 0), (0, 2)$ と, 直線 $b = a$ 上の点は含まない.

