

$$(1) \quad \log \left\{ (1+a^n)^{\frac{1}{n}} \right\} = \frac{\log(1+a^n)}{n} = f(n) \text{ とおく.}$$

(i) $a=1$ のとき

$$f(n) = \frac{\log 2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ より,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき

$$a^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ より, } f(n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

(iii) $a > 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{\log a^n \left(\frac{1}{a^n} + 1 \right)}{n} \\ &= \frac{n \log a}{n} + \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{a^n} + 1 \right) \\ &= \log a + \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{a^n} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{また,} \quad a^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{よって,} \quad f(n) \rightarrow \log a$$

$$\text{したがって,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}} = a$$

以上より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & (0 < a \leq 1 \text{ のとき}) \\ a & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log(1+x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{x} \log(1+x^2) \right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \log 2 + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

ここで, $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ において, $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\text{よって,} \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \log 2 + \frac{\pi}{12}}}$$

正四面体の1辺の長さを a とすると,

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = a, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}a^2 \quad \dots ①$$

次に, $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC}$ ($0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1$) と表せる.

$\triangle PQR$ は正三角形であるから,

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RP}|$$

すなわち,

$$|q\overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OA}| = |r\overrightarrow{OC} - q\overrightarrow{OB}| = |p\overrightarrow{OA} - r\overrightarrow{OC}|$$

辺々を2乗して, ①を用いると,

$$(p^2 + q^2 - pq)a^2 = (q^2 + r^2 - qr)a^2 = (r^2 + p^2 - rp)a^2$$

$a \neq 0$ を用いて,

$$\begin{cases} p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr & \dots ② \\ q^2 + r^2 - qr = r^2 + p^2 - rp & \dots ③ \end{cases}$$

②について

$$\begin{aligned} (p^2 - r^2) - q(p - r) &= 0 \\ (p - r)(p - q + r) &= 0 & \dots ④ \end{aligned}$$

③について

$$\begin{aligned} (q^2 - p^2) - r(q - p) &= 0 \\ (q - p)(q - r + p) &= 0 & \dots ⑤ \end{aligned}$$

ここで, $p \neq r$ と仮定すると, ④より,

$$\begin{aligned} p - q + r &= 0 \\ q &= p + r & \dots ⑥ \end{aligned}$$

⑥を⑤に代入して,

$$\begin{aligned} \{(p+r) - p\} \{(p+r) - r + p\} &= 0 \\ r \cdot 2p &= 0 \end{aligned}$$

これは, $r \neq 0, p \neq 0$ に反する. よって, $p = r$

このとき, ⑤は,

$$(q - p)q = 0$$

となる. これと, $q \neq 0$ より, $q - p = 0$

以上より, $p = q = r$ であり,

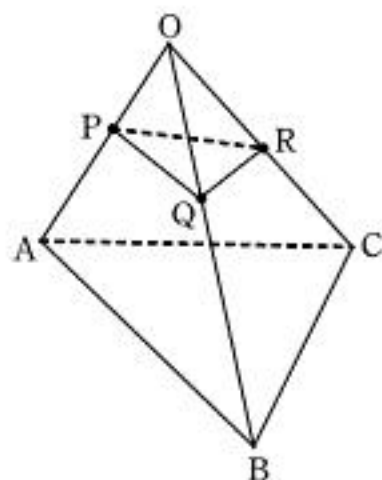
$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = p\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = p\overrightarrow{OC}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= p\overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OA} = p\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{QR} &= p\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OB} = p\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{RP} &= p\overrightarrow{OA} - p\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{CA} \end{aligned}$$

すなわち,

3辺 PQ, QR, RP は, それぞれ辺 AB, BC, CA に平行である. ■



$x+y=\alpha$, $xy=\beta$ とおく.

条件 $x^2+xy+y^2=6$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}(x+y)^2-xy &= 6 \\ \alpha^2-\beta &= 6 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

また, x, y は t の 2 次方程式 $t^2-\alpha t+\beta=0$ の解であり, x, y は実数であるから,

$$\alpha^2-4\beta=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①②より, β を消去すると,

$$\begin{aligned}\alpha^2-4(\alpha^2-6) &\geq 0 \\ \alpha^2 &\leq 8 \\ -2\sqrt{2} &\leq \alpha \leq 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}& x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \\ &= xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y) \\ &= \beta\alpha-\alpha^2+\alpha \\ &= (\alpha^2-6)\alpha-\alpha^2+\alpha \quad (\textcircled{1} \text{より}) \\ &= \alpha^3-\alpha^2-5\alpha\end{aligned}$$

以上より,

「 $-2\sqrt{2} \leq \alpha \leq 2\sqrt{2}$ のとき, $\alpha^3-\alpha^2-5\alpha$ のとり得る値の範囲」
を求めればよい. $\alpha^3-\alpha^2-5\alpha=f(\alpha)$ とおくと,

$$f'(\alpha)=3\alpha^2-2\alpha-5=(3\alpha-5)(\alpha+1)$$

したがって, $f(\alpha)$ の増減表は次のようになる.

α	$-2\sqrt{2}$	...	-1	...	$\frac{5}{3}$	...	$2\sqrt{2}$
$f'(\alpha)$		+	0	-	0	+	
$f(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

また,

$$\begin{cases} f(-2\sqrt{2}) = -8-6\sqrt{2} \\ f(-1) = 3 \\ f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{175}{27} \\ f(2\sqrt{2}) = -8+6\sqrt{2} \end{cases}$$

さらに, $3 > -8+6\sqrt{2}$, $-8-6\sqrt{2} < -\frac{175}{27}$

よって, とり得る値の範囲は,

$$\underline{\underline{-8-6\sqrt{2} \leq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leq 3}}$$

(1) $\sqrt[3]{2}$ が有理数と仮定する.

このとき, $\sqrt[3]{2} = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な正の整数) と表せて,

$$2 = \frac{q^3}{p^3} \Leftrightarrow q^3 = 2p^3$$

よって, q は偶数であり, $q = 2r$ (r は正の整数) と表せて,

$$(2r)^3 = 2p^3 \Leftrightarrow p^3 = 4r^3$$

よって, p が偶数となる.

以上より, p, q はともに偶数となるが, これは p と q が互いに素であることに矛盾する. よって, $\sqrt[3]{2}$ は無理数である. ■

(2) $P(x)$ を $x^3 - 2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax^2 + bx + c$ とすると, $P(x)$ は係数が有理数である多項式であるから,

$$a, b, c \text{ は有理数} \quad \dots \textcircled{1}$$

で,

$$P(x) = (x^3 - 2)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$\alpha = \sqrt[3]{2}$ として, ②に $x = \alpha$ を代入する. $P(\alpha) = 0$ と $\alpha^3 = 2$ より,

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

よって,

$$「a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0 \quad \dots\dots(*)」 \text{を示せばよい.}$$

$a = 0$ を背理法を用いて示す. $a \neq 0$ と仮定すると,

$$\alpha^2 + \frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{a} = 0$$

$\frac{b}{a} = b', \frac{c}{a} = c'$ とおくと, ①より, b', c' は有理数であり,

$$\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0$$

$$\alpha^2 = -b'\alpha - c' \quad \dots \textcircled{3}$$

③より, $\alpha^3 = \alpha^2\alpha = (-b'\alpha - c')$

$$= -b'\alpha^2 - c'\alpha$$

$$= -b'(-b'\alpha - c') - c'\alpha$$

$$= (b'^2 - c')\alpha + b'c'$$

これと, $\alpha^3 = 2$ より,

$$(b'^2 - c')\alpha + (b'c' - 2) = 0$$

b', c' は有理数であり, (1) は α の無理数であるから,

$$b'^2 - c' = 0 \quad \text{かつ} \quad b'c' - 2 = 0$$

c' を消去すると, $b'^3 = 2$ となる. b' は実数であるから,

$$b' = \sqrt[3]{2}$$

したがって, (1) より, b' は無理数となるが, これは, b' が有理数であることに矛盾する. よって, $a = 0$

このとき, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ は $b\alpha + c = 0$ となり, b, c は有理数, α は無理数であるから,

$$b = c = 0$$

となり, (*) が示された.

つまり, $P(x)$ は, $x^3 - 2$ で割り切れる. ■

(p): 正しい

[証明]

正 n 角形に外接する円の中心を O とし、
 三角形の頂点を A, B, C とする.

$\angle BAC = 60^\circ$ としてもよい. 円周角と
 中心角の関係により,

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$$

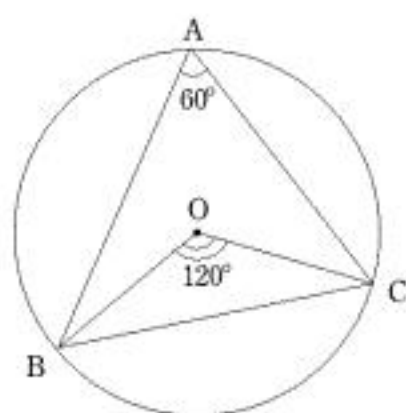
また, 2 点 B, C は正 n 角形の頂点であるから,

$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{n} \times k \quad (k \text{ は正の整数})$$

と表せる.

$$\text{以上より, } 120^\circ = \frac{360^\circ}{n} k \Leftrightarrow n = 3k$$

すなわち, n は 3 の倍数である. ■



(q): 正しくない

[説明]

一辺の長さが 1 である "正六角形 ABPQDC" を考える.

$$AC = 1, \quad AD = \sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{3}, \quad BD = 2$$

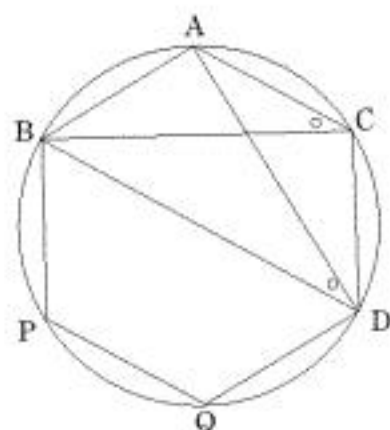
より,

$$AC < AD, \quad BC < BD \quad \dots \textcircled{1}$$

次に, 正六角形 ABPQDC に外接する円を考えると,
 円周角の定理より,

$$\angle ACB = \angle ADB, \text{ すなわち, } \angle C = \angle D \quad \dots \textcircled{2}$$

①②より, 反例があり, (q) は正しくない.



5 (q) [別解]

(q): 正しくない

[説明]

BD を直径とする円を K とし,
 図のように, 円 K 上に, B, A, C, D
 の順になる 2 点 A, C をとる.

BD は円の直径で, BC は円 K の
 直径でないから,

$$BC < BD \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABD$ において, $\angle BAD = 90^\circ$ より, $\angle ABD < 90^\circ$

$\square ABCD$ は円 K に内接しているから $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$

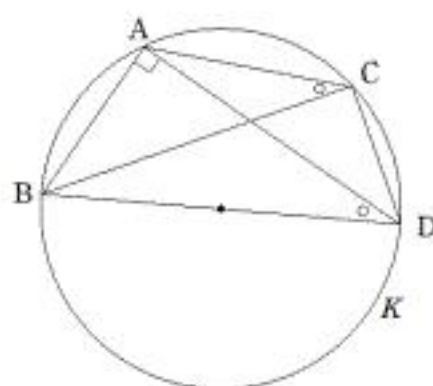
よって, $\angle ACD > 90^\circ$

したがって, $\triangle ACD$ において, $AC < AD \quad \dots \textcircled{2}$

また, 円周角の定理より, $\angle ACD = \angle ADB$,

すなわち, $\angle C = \angle D \quad \dots \textcircled{3}$

以上①, ②, ③より, 反例があり, (q) は正しくない.



(注) [別解] は, [本解] の四角形 ABCD を拡張したものである.

$Y_k < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる確率を q_k , $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_k \leq 1+\sqrt{3}$ となる確率を p_k ,

$Y_k > 1+\sqrt{3}$ となる確率を r_k ($k=1, 2, \dots, n$) とすると,

$$p_k + q_k + r_k = 1 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \dots \textcircled{1}$$

また, $Y_1 = X_1 \geq 1$ である. $Y_{k-1} \geq 1$ と仮定すると, $X_k \geq 1$ より, $Y_k \geq 1$ によって,

$$Y_m \geq 1 \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad \dots \textcircled{2}$$

次に, $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_k \leq 1+\sqrt{3}$ ($k=2, 3, \dots, n$) $\dots (*)$ を調べる.

漸化式より,

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \leq 1+\sqrt{3}$$

②より, $X_k \geq 3$ では成り立たず, $X_k = 1$ または 2 である.

(i) $X_k = 1$ のとき

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \frac{1}{Y_{k-1}} \leq \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (\textcircled{2} \text{より}) \\ &\Leftrightarrow Y_{k-1} \leq \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \end{aligned}$$

(ii) $X_k = 2$ のとき

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-3}{2} \leq \frac{1}{Y_{k-1}} \leq \sqrt{3}-1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{Y_{k-1}} \leq \sqrt{3}-1 \quad (\textcircled{2} \text{より}) \\ &\Leftrightarrow Y_{k-1} \geq \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (\textcircled{2} \text{より}) \end{aligned}$$

$$\text{以上(i), (ii) より, } \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_k \leq 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } X_k = 1 \text{ かつ } Y_{k-1} \leq \sqrt{3}+1 \\ \text{または} \\ \text{(ii) } X_k = 2 \text{ かつ } Y_{k-1} \geq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } p_k &= \frac{1}{6}(q_{k-1} + p_{k-1}) + \frac{1}{6}(p_{k-1} + r_{k-1}) \quad (k=2, 3, \dots, n) \\ &= \frac{1}{3}p_{k-1} + \frac{1}{6}(q_{k-1} + r_{k-1}) \\ &= \frac{1}{3}p_{k-1} + \frac{1}{6}(1 - p_{k-1}) \quad (\textcircled{1} \text{より}) \\ &= \frac{1}{6}p_{k-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

変形して,

$$p_k - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \left(p_{k-1} - \frac{1}{5} \right) \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

$$\text{よって, } p_n - \frac{1}{5} = \left(p_1 - \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

$p_1 = \frac{1}{6}$ より,

$$p_n = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6^n} \right)$$