

$a \geq 2$ より,

$$f(x) > 0 \iff x < -a \quad \text{または} \quad -2 < x$$

よって,

$$f(f(x)) > 0 \iff f(x) < -a \quad \text{または} \quad -2 < f(x)$$

ゆえに,

$f(f(x)) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つ.

$\iff$ “ $f(x) < -a$ または $-2 < f(x)$ ” がすべての実数 x に対して成り立つ. $\cdots (*)$

ここで, $y = f(x)$ は下に凸の放物線であり,

$-a \leq 2$ である.

よって,

$(*) \iff -2 < f(x)$ がすべての実数 x に対して成り立つ

$$\iff \left(\begin{array}{l} x^2 + (a+2)x + 2a+2 > 0 \text{ が} \\ \text{すべての実数 } x \text{ に対して成り立つ} \end{array} \right)$$

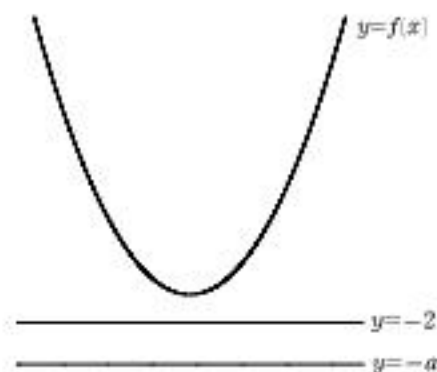
$$\iff (a+2)^2 - 4(2a+2) < 0$$

$$\iff a^2 - 4a - 4 < 0$$

$$\iff 2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}$$

$a \geq 2$ であるから, 求める a の範囲は,

$$\underline{\underline{2 \leq a < 2 + 2\sqrt{2}}} \quad \cdots (\text{答})$$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{y}$ とおく.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{x} + \frac{2}{3}\overrightarrow{y}, \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \end{aligned} \right\} \cdots \textcircled{1}$$

点Pは線分CE上より、実数 s ($0 \leq s \leq 1$) を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AE} + s\overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right)\overrightarrow{x} + s\overrightarrow{y} \quad (\textcircled{1} \text{より}) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

点Pは線分FG上より、実数 t ($0 \leq t \leq 1$) を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-t)\overrightarrow{AF} + t\overrightarrow{AG} \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\overrightarrow{x} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right)\overrightarrow{y} \quad (\textcircled{1} \text{より}) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③と、 $\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ は1次独立であるから、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = 1 - \frac{3}{4}t \quad \text{かつ} \quad s = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t, \quad \text{すなわち, } (s, t) = \left(\frac{8}{11}, \frac{2}{11}\right)$$

したがって、② (または③) より、 $\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}\overrightarrow{x} + \frac{8}{11}\overrightarrow{y}$

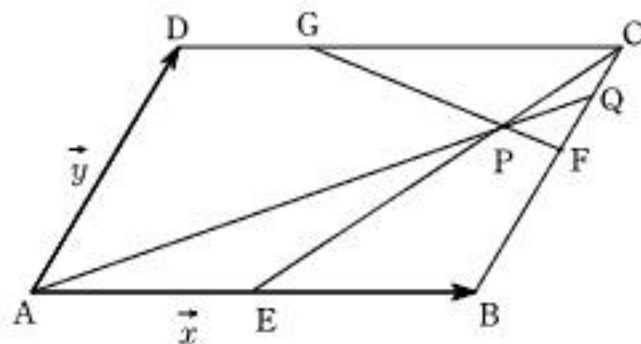
次に、点Qは直線AP上より、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}k\overrightarrow{x} + \frac{8}{11}k\overrightarrow{y}$$

さらに、点Qは辺BC上より、 $\frac{19}{22}k = 1$, すなわち、 $k = \frac{22}{19}$

よって、 $\overrightarrow{AQ} = \frac{22}{19}\overrightarrow{AP}$

ゆえに、 $AP:PQ = 19:(22-19) = \underline{19:3} \quad \cdots (\text{答})$



- (1) x^n を $(x-k)(x-k-1)$ で割った商を $Q(x)$ とおくと,

$$x^n = (x-k)(x-k-1)Q(x) + ax + b \cdots \textcircled{1}$$

上式は恒等式なので, $x=k, k+1$ を代入できて,

$$\begin{cases} k^n = ak + b & \cdots \textcircled{2} \\ (k+1)^n = a(k+1) + b & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

③-②より,

$$a = (k+1)^n - k^n \cdots \textcircled{4}$$

④を②に代入して,

$$b = k^n - \{(k+1)^n - k^n\}k \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤と, n と k は自然数であるから, a と b は整数である.

- (2) a と b をともに割り切る素数が存在すると仮定し, その素数を p とする.

②, ③より, $k^n, (k+1)^n$ はともに素数 p で割り切れる.

よって, $k, k+1$ はともに素数 p で割り切れる.

すなわち,

$$\begin{cases} k = p\alpha & \cdots \textcircled{6} \\ k+1 = p\beta & \cdots \textcircled{7} \end{cases} \quad (\alpha, \beta \text{ は整数})$$

と表すことができる.

⑦-⑥より,

$$1 = p(\beta - \alpha)$$

したがって, $p=1$ となり, これは“ p が素数”に矛盾する.

すなわち, 仮定が誤りであり,

a と b をともに割り切る素数は存在しない.

- (1) C の中心を A とすると, $A(0, 3)$ で, 半径 r は

$$r = AP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

直線 AP の傾きは $-\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ より, 接線の傾きは $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

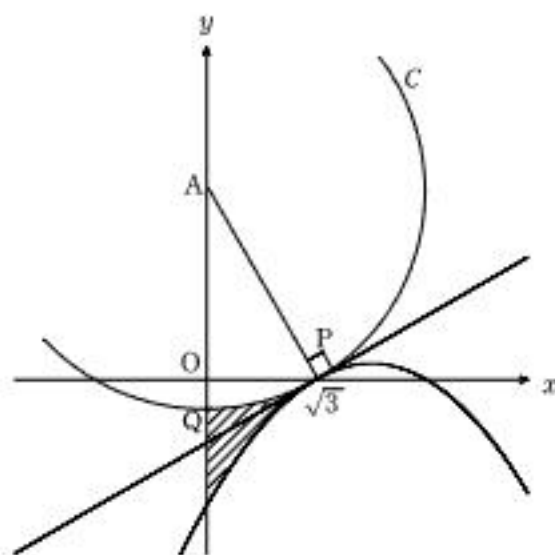
ここで, $f(x) = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ とおくと,

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + \alpha$$

以上と条件より,

$$\begin{cases} f(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} -1 + \sqrt{3}\alpha - \beta = 0 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{3} + \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

よって, $\alpha = \sqrt{3}, \beta = 2 \quad \cdots (\text{答})$



- (2) 求める面積を S とすると, S は図の斜線部分の面積である.

円 C と y 軸の交点のうち, y 座標が小さい方を Q とする. さらに扇形 APQ の面積を S' とすると,

$$S = \triangle OPA + \int_0^{\sqrt{3}} \{-f(x)\} dx - S'$$

$$\text{ここに, } \triangle OPA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \{-f(x)\} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{3} - \sqrt{3}x + 2 \right) dx = \left[\frac{x^3}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2x \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{5}{6}\sqrt{3}$$

さらに, $\tan \angle OAP = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より, $\angle OAP = 30^\circ$ であるから, 円の半径を r とすると,

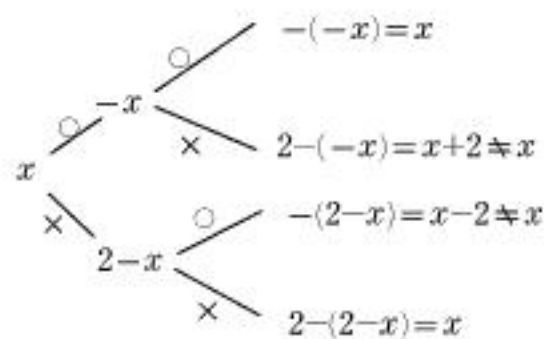
$$S' = \pi r^2 \times \frac{30^\circ}{360^\circ} = \pi \cdot 12 \cdot \frac{1}{12} = \pi$$

以上より,

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6}\sqrt{3} - \pi = \underline{\underline{\frac{7}{3}\sqrt{3} - \pi}} \quad \cdots (\text{答})$$

- (1) 座標の t の点に対して、 $\left[\begin{array}{l} \text{原点に関して対称な点の座標は } -t, \text{ 座標が } 1 \text{ の点に関して対称な} \\ \text{点に関しては } 2-t \text{ とする。} \end{array} \right]$

したがって、2回投げたときの右の座標を図示すると、(表を○、裏を×とする)



よって、求める確率は、 $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{1}{2}$... (答)

- (2) (1)の考察より、2回の硬貨投げで、右の座標は、

(A) 確率 $\frac{1}{2}$ で変化はない (B) 確率 $\frac{1}{4}$ で 2 増加する (C) 確率 $\frac{1}{4}$ で 2 減少する

2回の硬貨投げを 1 セットとし、(A)、(B)、(C) がそれぞれ a , b , c セット起こるとすると、

$$\begin{cases} a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0 & \dots\dots ① \\ a + b + c = n & \dots\dots ② \\ 2b - 2c = 2n & \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$③ \text{ より, } b - c = n \quad \dots\dots ③'$$

$$② - ③' \text{ より, } a + 2c = 0$$

$$\text{これと } ① \text{ より, } (a, c) = (0, 0)$$

$$\text{よって, } ②, ③ \text{ より, } (a, b, c) = (0, n, 0)$$

すなわち、(B) が n セットで、(A)、(C) は 0 セットである。

よって、求める確率は、

$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{4}\right)^n}} \quad \dots \text{ (答)}$$