

$\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$ とおく.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \vec{x} + \vec{y}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{x} \\ \overrightarrow{AF} &= \vec{x} + \frac{2}{3}\vec{y}, \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\vec{x} + \vec{y} \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{1}$$

点Pは線分CE上より, 実数 $s(0 \leq s \leq 1)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AE} + s\overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right)\vec{x} + s\vec{y} \quad (\textcircled{1} \text{より}) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

点Pは線分FG上より, 実数 $t(0 \leq t \leq 1)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-t)\overrightarrow{AF} + t\overrightarrow{AG} \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\vec{x} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right)\vec{y} \quad (\textcircled{1} \text{より}) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③と, $\vec{x}$ と $\vec{y}$ は1次独立であるから,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = 1 - \frac{3}{4}t \quad \text{かつ} \quad s = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}t, \quad \text{すなわち, } (s, t) = \left(\frac{8}{11}, \frac{2}{11}\right)$$

したがって, ② (または③) より, $\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}\vec{x} + \frac{8}{11}\vec{y}$

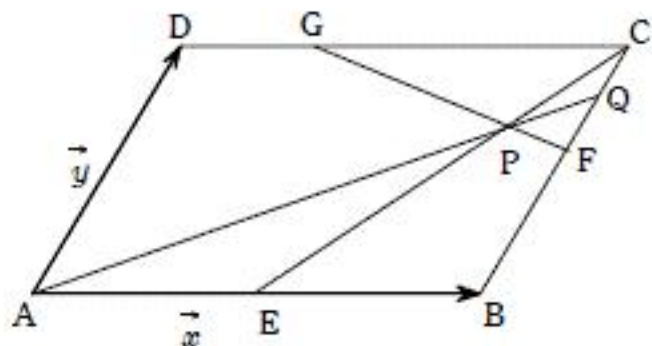
次に, 点Qは直線AP上より, 実数 k を用いて,

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}k\vec{x} + \frac{8}{11}k\vec{y}$$

さらに, 点Qは辺BC上より, $\frac{19}{22}k = 1$, すなわち, $k = \frac{22}{19}$

よって, $\overrightarrow{AQ} = \frac{22}{19}\overrightarrow{AP}$

ゆえに, $AP:PQ = 19:(22-19) = \underline{\underline{19:3}} \quad \dots (\text{答})$



$N=2$ のとき

$$a_1=1, a_2=\frac{1-1}{2}=0. \text{ さらに, (ii)より, } a_n=0 \text{ (} n \geq 3 \text{)}$$

$$\text{すなわち, } a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$\text{よって, } \sum_{n=1}^M a_n = 1$$

$$\text{また, } 2^{N+1} - N - 5 = 2^3 - 2 - 5 = 1$$

$$\text{ゆえに, } \sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5 \text{ は成り立つ.}$$

$N \geq 3$ のとき

$$a_2 = \frac{(2^N - 3) - 1}{2} = 2^{N-1} - 2, a_3 = \frac{2^{N-1} - 2}{2} = 2^{N-2} - 1 \dots\dots ①$$

である. 次に,

「 $3 \leq n \leq N+1$ のとき, $a_n = 2^{N-(n-1)} - 1 \dots\dots (*)$ 」を数学的帰納法で示す.

(I) $n=3$ のとき ①より, $(*)$ は成り立つ.

(II) $n=k$ ($3 \leq k \leq N$) のとき $(*)$ が成り立つとする.

$$a_k = 2^{N-(k-1)} - 1 \text{ は奇数より,}$$

$$a_{k+1} = \frac{\{2^{N-(k-1)} - 1\} - 1}{2} = 2^{N-k} - 1$$

となり, $(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上 (I)(II)より, $a_n = 2^{N-(n-1)} - 1$ ($3 \leq n \leq N+1$) が成り立つ.

よって, $a_{N+1} = 0$ である. これと(ii)より, $a_n = 0$ ($n \geq N+2$)

ゆえに,

$$a_n = \begin{cases} 2^N - 3 & (n=1) \\ 2^{N-1} - 2 & (n=2) \\ 2^{N+1-n} - 1 & (3 \leq n \leq N) \\ 0 & (n \geq N+1) \end{cases}$$

$S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ とする. $a_n > 0$ ($1 \leq n \leq N$), $a_n = 0$ ($n \geq N+1$) より,

$$S_1 < S_2 < \dots\dots < S_N = S_{N+1} = S_{N+2} = \dots\dots$$

ここに,

$$\begin{aligned} S_N &= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + (2^{N-2} - 1) + (2^{N-3} - 1) + \dots\dots + (2^1 - 1) \\ &= (2^1 + 2^2 + \dots\dots + 2^N) - 5 - (N-2) \\ &= \frac{2(1-2^N)}{1-2} - N - 3 \\ &= 2^{N+1} - N - 5 \end{aligned}$$

よって,

$$S_M = 2^{N+1} - N - 5$$

以上より, $N=2$ のとき, $N \geq 3$ のとき のいずれの場合も,

$$\sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5 \text{ が成り立つ.}$$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ の解は

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2}$ とすると,

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

x^n を $x^2 - 2x - 1$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると,

$$x^n = (x^2 - 2x - 1)Q(x) + ax + b$$

上式は恒等式なので, $x = \alpha, \beta$ を代入できて,

$$\begin{cases} \alpha^n = a\alpha + b & \cdots \cdots \text{①} \\ \beta^n = a\beta + b & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

① - ② より,

$$a = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

② $\times \alpha$ - ① $\times \beta$ より,

$$b = \frac{\alpha\beta^n - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta} = \frac{-\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

ここで, $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, b_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とすると,

$$a_1 = 1, b_1 = 0 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$b_{n+1} = a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \cdots \text{④}$$

さらに,

$$a_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すなわち,

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

「 a_n と b_n は整数である $\cdots \cdots (*)$ 」を数学的帰納法で示す.

(i) $n = 1$ のとき ③より $(*)$ は成り立つ.

(ii) $n = 1$ のとき $(*)$ が成り立つとする.

④, ⑤より,

$$b_{k+1} = a_k, a_{k+1} = 2a_k + b_k$$

よって, a_{k+1}, b_{k+1} も整数であり, $n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ.

以上(i), (ii)より, $(*)$ が示された.

「 a_n と b_n をともに割り切る素数はない $\cdots \cdots (**)$ 」を数学的帰納法で示す.

(I) $n = 1$ のとき ③より $(*)$ は成り立つ.

(II) $n = k$ のとき $(**)$ が成り立つとする.

④, ⑤より,

$$b_{k+1} = a_k, a_{k+1} = 2a_k + b_k$$

よって,

$$a_k = b_{k+1}, b_k = a_{k+1} - 2b_{k+1} \quad \cdots \cdots \text{⑥}$$

ここで, a_{k+1}, b_{k+1} をともに割り切る素数が存在すると仮定する. その素数を p とする.

⑥より, a_k と b_k はともに素数 p で割り切れる.

これは, $n = k$ のとき $(**)$ が成り立つことに反する.

よって, 仮定が誤りであり, a_{k+1} と b_{k+1} をともに割り切る素数はない.

すなわち, $n = k + 1$ のときも $(**)$ は成り立つ.

以上(I), (II)より, $(**)$ が示された.

$f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とする. $f(x) = f(-x)$ より,

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値を求めればよい.

$$f'(x) = -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad f''(x) = -\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって, $f'(x)$ の増減は右の表のようになる.

また,

$$f'(0) = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{4} > -1 + \frac{1.7 \times 3 \cdot 1}{4} = \frac{1.27}{4} > 0$$

よって, $f'(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる.

したがって,

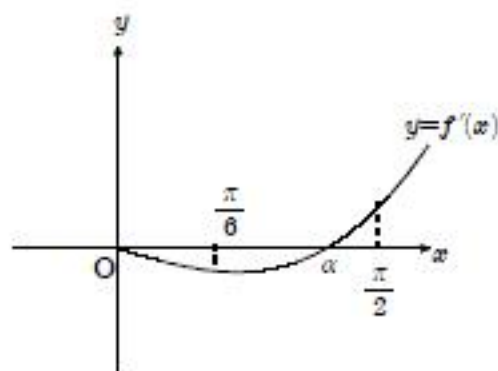
$f'(0) = 0$ かつ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たす x はただ 1 つであり,

それを α とおく.

よって, $f(x)$ の増減表は下の表のようになる.

	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		↘		↗	



$$f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{16} > \frac{1.7 \times 3 \cdot 1^2}{16} = \frac{1.337}{16} > 1 = f(0)$$

よって, 最大値は

$$\frac{\sqrt{3}\pi^2}{16} \dots (\text{答})$$

C と C_1 は点 A で接するから、 A における C と C_1 の接線は一致する。この接線を l とする。

ここで、 $\triangle PAB$ は y 軸に関して対称な正三角形であるから、直線 AP の傾きは $-\sqrt{3}$ 。したがって、

$$l \text{ の傾きは } \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 C_1 について、 $y' = \frac{\sqrt{3}}{1+x}$ であるから、 A の x 座標を t とすると、 $\textcircled{1}$ より、

$$\frac{\sqrt{3}}{1+t} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ すなわち } t=2$$

よって、 $A(2, \sqrt{3} \log 3)$ である。

さらに、 $PA = AB = 2t = 4$ であり、 $OP = \sqrt{3} \log 3 + 2\sqrt{3}$

また、円 C と y 軸の交点のうち、 y 座標が小さい方を Q とする。

C, C_1, C_2 で囲まれた図形の図の斜線部分であり、 y 軸に関して対称である。

面積を S とし、 $H(2, 0)$ とすると、

$$S = \left\{ (\text{台形 OHAP の面積 } S_1) - (\text{扇形 PAQ の面積 } S_2) - \int_0^2 \sqrt{3} \log(1+x) dx \right\}$$

ここに、

$$S_1 = \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} \log 3 + 2\sqrt{3}) + \sqrt{3} \log 3 \} \times 2 = 2\sqrt{3} \log 3 + 2\sqrt{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} PA^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3} \pi$$

$$\int_0^2 \sqrt{3} \log(1+x) dx = \sqrt{3} [(1+x) \log(1+x) - x]_0^2 = \sqrt{3} (3 \log 3 - 2)$$

以上より、

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ (2\sqrt{3} \log 3 + 2\sqrt{3}) - \frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} (3 \log 3 - 2) \right\} \\ &= \underline{\underline{8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \log 3 - \frac{8}{3} \pi}} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(注)

点 P が x 軸より下側にあるとき、 $-1 < t < 0$ であり、

$$(l \text{ の傾き}) = \frac{\sqrt{3}}{1+t} > \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 l と x 軸の正の方向とのなす角を θ とすると、

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1+t} > \sqrt{3}$$

より、

$$\theta > 60^\circ$$

また、

$$\angle OPA = \theta$$

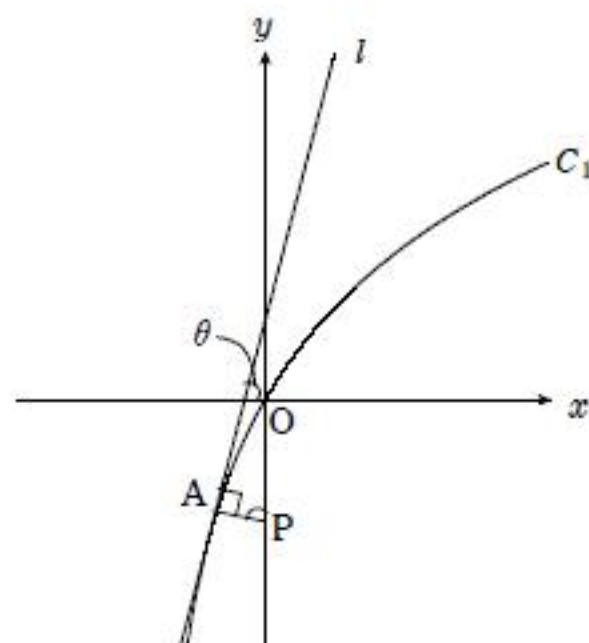
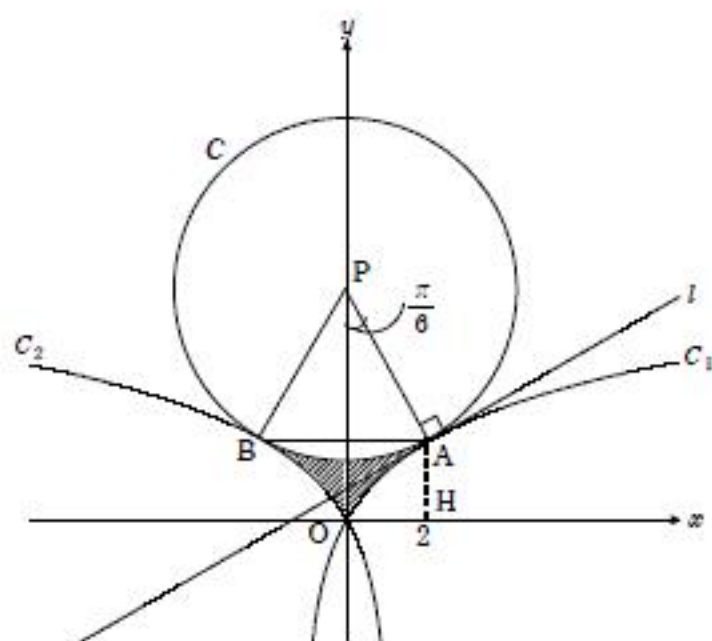
よって、

$$\angle OPA > 60^\circ$$

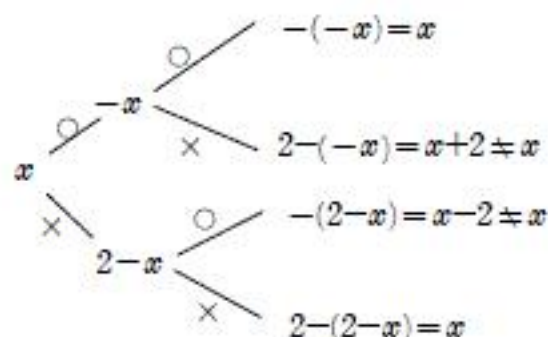
したがって、 $\triangle PAB$ は正三角形になり得ない。

(注 2)

C, C_1, C_2 で囲まれた部分については、 C の内部は除くものと考えた。



- (1) 座標の t の点に対して、 $\left[\begin{array}{l} \text{原点に関して対照な点の座標は } -t, \text{ 座標が } 1 \text{ の点に関して対称な} \\ \text{点の座標は } 2-t \end{array} \right]$
したがって、2回投げたときの石の座標を図示すると（表を○，裏を×とする），



よって、求める確率は、 $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{1}{2}$ … (答)

- (2) (1)の考察より、2回の硬貨投げで、石の座標は、

(A) 確率 $\frac{1}{2}$ で変化はない (B) 確率 $\frac{1}{4}$ で 2 増加する (C) 確率 $\frac{1}{4}$ で 2 減少する

2回の硬貨投げを 1 セットとし、(A)，(B)，(C) がそれぞれ a ， b ， c セット起こるとすると、

$$\begin{cases} a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a + b + c = n & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 2b - 2c = 2n - 2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{より, } b - c = n - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}'$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3}' \text{より, } a + 2c = 1$$

$$\text{これと} \textcircled{1} \text{より, } (a, c) = (1, 0)$$

$$\text{よって, } (a, b, c) = (0, n-1, 0)$$

すなわち、(A) が 1 セット、(B) が $n-1$ セット、(C) は 0 セットである。

よって、求める確率は、

$${}_nC_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = n \cdot \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}} \quad \cdots \text{ (答)}$$