

$$\{x^2 - 2(\cos\theta)x - \cos\theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan\theta)x + 3\} = 0 \quad \cdots (*)$$

$$\iff x^2 - 2(\cos\theta)x - \cos\theta + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \text{または} \quad x^2 + 2(\tan\theta)x + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

ここで、①の判別式を D_1 、②の判別式を D_2 とすると、

$$\begin{cases} D_1/4 = \cos^2\theta + \cos\theta - 1 \\ D_2/4 = \tan^2\theta - 3 \end{cases}$$

(i) $0^\circ \leq \theta < 60^\circ$ のとき

$D_2 < 0$ となり、②は虚数解をもつ。

(ii) $60^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のとき

$$0 < \cos\theta \leq \frac{1}{2} \text{ より,}$$

$$D_1/4 = \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \leq -\frac{1}{4} < 0$$

となり、①は虚数解をもつ。

以上(i),(ii)より、

(*)は虚数解を少なくとも1つ持つ。

- (1) 接線の接点を $(a, a^3 - a)$ とする. $y = x^3 - x$ において, $y' = 3x^2 - 1$ であるから, 接線の方程式は,

$$y - (a^3 - a) = (3a^2 - 1)(x - a)$$

$$y = (3a^2 - 1)x - 2a^3 \quad \dots\dots ①$$

これが, 点 $P(1, t)$ を通ることから,

$$t = (3a^2 - 1) \cdot 1 - 2a^3$$

$$-2a^3 + 3a^2 - 1 = t \quad \dots\dots ②$$

したがって, 接線が 1 本だけ引ける条件は

a の方程式②の相異なる実数解がただ 1 つ

となる条件である. ここで, $f(a) = -2a^3 + 3a^2 - 1$ とおくと,

ay 平面上で, $y = f(a)$ のグラフと直線 $y = t$ の
共有点がただ 1 つ

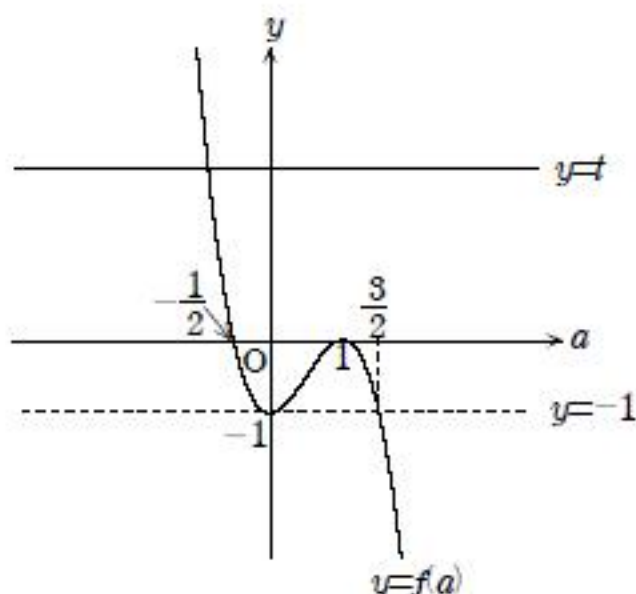
となる条件を求めればよい.

$$\begin{cases} f'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1) \\ f(0) = -1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

より, $y = f(a)$ のグラフは右の図のようになる.

したがって, 求める t の範囲は,

$$\underline{t > 0, t < -1} \quad \dots \text{ (答)}$$



- (2) ②において $t = 0$ とすると,

$$-2a^3 + 3a^2 - 1 = 0$$

$$(a-1)^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$a = 1, -\frac{1}{2}$$

- ②において $t = -1$ とすると,

$$-2a^3 + 3a^2 - 1 = -1$$

$$a^2 \left(a - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$a = 0, \frac{3}{2}$$

これらと(1)の図より, 接点の x 座標 a の取り得る値の範囲は,

$$a < -\frac{1}{2}, a > \frac{3}{2} \quad \dots\dots ③$$

次に, C と接線①の共有点の x 座標を求める.

$$x^3 - x = (3a^2 - 1)x - 2a^3$$

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$$(x-a)^2(x+2a) = 0$$

$$x = a, -2a$$

よって,

$$\begin{aligned} S(t) &= \left| \int_{-2a}^a [(x^3 - x) - \{(3a^2 - 1)x - 2a^3\}] dx \right| \\ &= \left| \int_{-2a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3x \right]_{-2a}^a \right| \\ &= \frac{27}{4}a^4 \end{aligned}$$

- ③より, a^4 の取り得る値の範囲は $a^4 > \frac{1}{16}$

よって, $S(t)$ の取り得る値の範囲は

$$S(t) > \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{16}$$

すなわち,

$$\underline{S(t) > \frac{27}{64}} \quad \dots \text{ (答)}$$

P は l 上, Q は m 上, R は n 上にあるので, 実数 p, q, r を用いて, 次のように書ける.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{u} = (2p+1, p, -p-2) \quad \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{v} = (q+1, -q+2, q-3)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{w} = (r+1, 2r-1, r)$$

よって,

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-2p+q, -p-q+2, p+q-1) \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (-2p+r, -p+2r-1, p+r+2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots ②$$

$PQ \perp m$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v} &= 0 \\ (-2p+q) \cdot 1 + (-p-q+2) \cdot (-1) + (p+q-1) \cdot 1 &= 0 \quad \dots\dots ③ \\ q &= 1 \end{aligned}$$

$PR \perp n$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{w} &= 0 \\ (-2p+r) \cdot 1 + (-p+2r-1) \cdot 2 + (p+r+2) \cdot 1 &= 0 \\ r &= \frac{1}{2}p \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

②に③, ④を代入して,

$$\overrightarrow{PQ} = (-2p+1, -p+1, p), \quad \overrightarrow{PR} = \left(-\frac{3}{2}p, -1, \frac{3}{2}p+2\right)$$

よって,

$$\begin{aligned} PQ^2 + PR^2 &= \{(-2p+1)^2 + (-p+1)^2 + p^2\} + \left\{\left(-\frac{3}{2}p\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{3}{2}p+2\right)^2\right\} \\ &= \frac{21}{2}p^2 + 7 \quad \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

①, ⑤より,

$PQ^2 + PR^2$ を最小にする P は $P(1, 0, -2)$ であり, そのときの $PQ^2 + PR^2$ は 7 である. ... (答)

$$(1) \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \iff a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$$

よって,

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \iff a_n = 2^{n-1} + 1 \quad \dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2a_n &= (2^{n-1} + 1)^2 - 2(2^{n-1} + 1) \\ &= 2^{2(n-1)} - 1 \end{aligned}$$

よって, $2^{2(n-1)} - 1 > 10^{15} \dots \textcircled{1}$ を満たす最小の自然数 n を求めればよい. ここで $\textcircled{1}$ は $n=1$ では明らかに成立しないので, $n \geq 2$ として考えてよい.

$$\textcircled{1} \implies 2^{2(n-1)} > 10^{15}$$

が成立し, 等式 $2^{2(n-1)} - 1 = 10^{15}$ が成立しない (両辺の偶奇が一致しない) ので

$$2^{2(n-1)} > 10^{15} \implies 2^{2(n-1)} - 1 \geq 10^{15} \implies \textcircled{1}$$

したがって,

$$\textcircled{1} \iff 2^{2(n-1)} > 10^{15} \dots \dots \textcircled{2}$$

が成立する. $\textcircled{2}$ の両辺の常用対数をとると,

$$2(n-1)\log_{10} 2 > 15 \iff n-1 > \frac{15}{2\log_{10} 2} \dots \dots \textcircled{3}$$

ここで, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であるから,

$$\frac{15}{2 \cdot 0.3011} < \frac{15}{2\log_{10} 2} < \frac{15}{2 \cdot 0.3010}$$

であり, $\frac{15}{2 \cdot 0.3011} = 24.908\dots, \frac{15}{2 \cdot 0.3010} = 24.916\dots$ であるから,

$\textcircled{3}$ を満たす最小の自然数 $n=26$ $\dots (\text{答})$

A が k の目 (k は $1 \leq k \leq 20$ を満たす整数) を出す確率 $\frac{1}{20}$ であり, k 点を得られるのは B が

k より小さい目を出すときで, その確率は $\frac{k-1}{20}$ である.

したがって,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} k \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{k-1}{20} &= \frac{1}{400} \sum_{k=1}^{20} k(k-1) \\
 &= \frac{1}{400} \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{3} \{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\} \\
 &= \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{3} \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \\
 &= \frac{133}{20} \quad \dots \text{(答)}
 \end{aligned}$$