

Pは*l*上, Qは*m*上, Rは*n*上にあるので, 実数 p, q, r を用いて, 次のように書ける.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{u} = (2p+1, p, -p-2) \quad \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{v} = (q+1, -q+2, q-3)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{w} = (r+1, 2r-1, r)$$

よって,

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-2p+q, -p-q+2, p+q-1) \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (-2p+r, -p+2r-1, p+r+2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots ②$$

$PQ \perp m$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v} &= 0 \\ (-2p+q) \cdot 1 + (-p-q+2) \cdot (-1) + (p+q-1) \cdot 1 &= 0 \\ q &= 1 \end{aligned} \quad \dots\dots ③$$

$PR \perp n$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{w} &= 0 \\ (-2p+r) \cdot 1 + (-p+2r-1) \cdot 2 + (p+r+2) \cdot 1 &= 0 \\ r &= \frac{1}{2}p \end{aligned} \quad \dots\dots ④$$

②に③, ④を代入して,

$$\overrightarrow{PQ} = (-2p+1, -p+1, p), \quad \overrightarrow{PR} = \left(-\frac{3}{2}p, -1, \frac{3}{2}p+2\right)$$

よって,

$$\begin{aligned} PQ^2 + PR^2 &= \{(-2p+1)^2 + (-p+1)^2 + p^2\} + \left\{\left(-\frac{3}{2}p\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{3}{2}p+2\right)^2\right\} \\ &= \frac{21}{2}p^2 + 7 \end{aligned} \quad \dots\dots ⑤$$

①, ⑤より,

$PQ^2 + PR^2$ を最小にする P は $P(1, 0, -2)$ であり, そのときの $PQ^2 + PR^2$ は 7 である. … (答)

$n+1$ 秒後に同じ点にいる事象は、次の2つの事象にもれなく排反に分けることができる。

ただし、 $n \geq 0$ とする。

(i) n 秒後に同じ点にいて、次の移動は、同じ動きをする。

(ii) n 秒後に異なる点にいて、次の移動は、2つの粒子が n 秒後にいなかった点に動く。

よって、

$$p(n+1) = p(n) \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \times 2 \right\} + \{1 - p(n)\} \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$p(n+1) = \frac{1}{4}p(n) + \frac{1}{4}$$

$$p(n+1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left\{ p(n) - \frac{1}{3} \right\}$$

したがって、

$$p(n) - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} \right)^n \left\{ p(0) - \frac{1}{3} \right\}$$

$p(0) = 1$ より、

$$\underline{\underline{p(n) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{3}}} \quad \dots \text{ (答)}$$

$\angle A = \theta$ とおくと, $\angle B = 2\theta$, $\angle C = \pi - 3\theta$

よって, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ①

正弦定理より,

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{CA}{\sin 2\theta}$$

$$CA = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$$

したがって,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cos \theta \cdot \sin(\pi - 3\theta) = \sin 3\theta \cos \theta \quad (= f(\theta) \text{ とおく})$$

よって,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 3 \cos 3\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin \theta \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(3\theta - \theta) + \cos(3\theta + \theta) \} - \frac{1}{2} \{ \cos(3\theta - \theta) - \cos(3\theta + \theta) \} \\ &= 2 \cos 4\theta + \cos 2\theta \\ &= 2(2 \cos^2 2\theta - 1) + \cos 2\theta \\ &= 4t^2 + t - 2 \quad (\cos 2\theta = t) \end{aligned}$$

①より,

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$
t	1	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

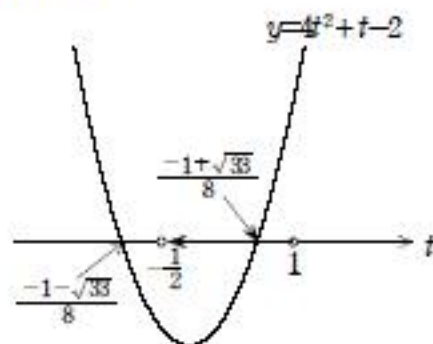
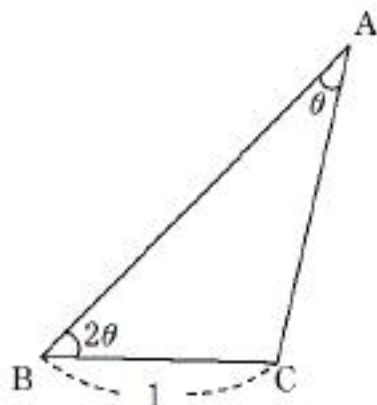
さらに, $\cos 2\theta = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす θ を θ_0 とする.

右のグラフより, $f(\theta)$ の増減表は次のようになる.

θ	0	...	θ_0	...	$\frac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって, 求める $\cos \angle B$ は

$$\cos \angle B = \cos 2\theta_0 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \quad \dots (\text{答})$$



$$f(x) \leq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2 \quad \dots\dots ①$$

①において、 $f(x)=t$ とおくと、

$$\begin{aligned} t \leq t^3 - 2t^2 + 2 &\iff (t-2)(t-1)(t+1) \geq 0 \\ &\iff -1 \leq t \leq 1 \text{ または } t \geq 2 \end{aligned}$$

よって、

①がすべての実数 x で成立する

$\iff$ すべての実数 x で $-1 \leq f(x) \leq 1$ または $f(x) \geq 2$ が成立する

であるが、ここで $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$ に対して

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \dots\dots ②$$

より、 $f(x)$ は連続な関数であるから、すべての実数 x に対して、 $-1 \leq f(x) \leq 1$ と $f(x) \geq 2$ がともに成立することはない。なぜなら、もし、ある実数 p, q に対して

$$-1 \leq f(p) \leq 1 \text{ かつ } f(q) \geq 2$$

が成立したと仮定すると、連続関数の中間値の定理によって、 $f(x)$ は $f(p)$ と $f(q)$ の間にある任意の数を取り得ることになって、題意に反するからである。

さらに、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

であり、すべての実数 x に対して $f(x) \geq 2$ が成立することはない。

したがって②に注意して、すべての実数 x に対して

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

$$\iff -x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x^2 + x + 1$$

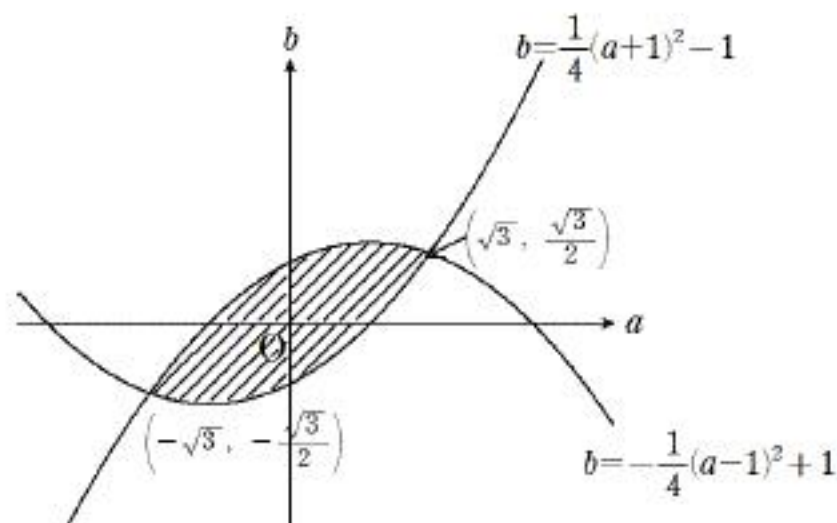
$$\iff x^2 + (a+1)x + b+1 \geq 0 \text{ かつ } x^2 - (a-1)x - (b-1) \geq 0 \quad \dots\dots ③$$

このとき、③における二次式の判別式を考えて、求める条件は

$$(a+1)^2 - 4(b+1) \leq 0 \text{ かつ } (a-1)^2 + 4(b-1) \leq 0$$

$$\iff \frac{1}{4}(a+1)^2 - 1 \leq b \leq -\frac{1}{4}(a-1)^2 + 1$$

これを図示すると、次図の網目部となる。ただし、境界はすべて含む。



$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

であるから、 $a^3 + b^3$ が 81 で割り切れるとき、 $a+b$ は 3 で割り切れることに注意する。

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)\{(a+b)^2 - 3ab\} \quad \dots\dots ①$$

ここで、 $(a+b)^2 - 3ab$ が 9 で割り切れる、つまり、 $(a+b)^2 - 3ab = 9m$ (m は自然数) と仮定すると、 $a+b = 3n$ (n は自然数) とおくと、

$$(3n)^2 - 3ab = 9m \iff ab = 3(n^2 - m)$$

となって、 a, b の少なくとも一方が 3 の倍数となって与えられた条件に反する。したがって、 $(a+b)^2 - 3ab$ は 9 では割り切れない。しかし、

$$(a+b)^2 - 3ab = 3(3n^2 - ab)$$

より、3 で割り切れる。つまり、 $(a+b)^2 - 3ab$ は 3 の因数をただ一つだけもので、①から $a+b$ は 27 で割り切れる。

次に、 $a+b = 27$ をみたす自然数で $a^2 + b^2$ が最小となるものを考える。

$$a^2 + b^2 = a^2 + (27-a)^2 = 2\left(a - \frac{27}{2}\right)^2 + \frac{27^2}{2} \quad \dots\dots ②$$

であり、 a, b がともに 3 では割り切れない自然数であることから、②は

$(a, b) = (13, 14)(14, 13)$ のときに最小値 365 をとる。

ここで、 $a+b = 27k$ (k は 2 以上の自然数) のとき

$$a^2 + b^2 = a^2 + (27k-a)^2 = 2\left(a - \frac{27k}{2}\right)^2 + \frac{27^2 k^2}{2} \geq \frac{27^2 \cdot 2^2}{2} > 365$$

であるから、このとき、365 より小さい値をとることはない。

以上より、求めるものは $(a, b) = (13, 14)(14, 13)$ 、最小値 365 … (答)

6 C_1, C_2 は直線 $y=x$ に関して対称であるから、

$$A\left(a, \frac{1}{a}\right) \quad (a > 1)$$

としてもよい。このとき、 $B\left(\frac{1}{a}, a\right)$ である。

直線 OA の傾きを m_1 とすると、

$$m_1 = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$$

また、 $C_2: y = \frac{1}{x}$ において、 $y' = -\frac{1}{x^2}$ より、 l の傾きを m_2 とすると、

$$m_2 = -\frac{1}{a^2}$$

ここで、

$$m_1 = -m_2 = \tan \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$$

とおくと、条件より、 $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ ①

よって、

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} &\iff \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\iff \tan^2 \alpha + 2\sqrt{3}\tan \alpha - 1 = 0 \\ &\iff \tan \alpha = 2 - \sqrt{3} \quad (\tan \alpha > 0 \text{ より}) \\ &\iff a^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\ &\quad = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

①より、 $\alpha = \frac{\pi}{12}$

これと、 $y=x$ に関する対称性より、 $\angle AOB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \times 2 = \frac{\pi}{3}$

また、 $OA^2 = a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$ より、 $OA = 2$

すなわち、 C_2 の半径は 2

よって、

$$(\text{扇形OABの面積}) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \quad \text{..... ②}$$

次に、 $A'(a, 0), B'\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ とすると、

$$\begin{cases} \triangle OAA' = \frac{1}{2}OA' \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \\ \triangle OBB' = \frac{1}{2}OB' \cdot BB' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

より、

$$\triangle OBB' = \triangle OAA'$$

したがって、

$$\left(\begin{array}{l} 2 \text{ 線分 } OA, OB \text{ および } C_1 \text{ で} \\ \text{囲まれる部分の面積} \end{array} \right)$$

$$= \triangle OBB' + \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x} dx - \triangle OAA'$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x} dx$$

$$= [\log |x|]_{\frac{1}{a}}^a$$

$$= \log a - \log \frac{1}{a} = \log a^2 = \log(2 + \sqrt{3}) \quad \text{..... ③}$$

②、③より、 C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積は

$$\frac{2}{3}\pi - \log(2 + \sqrt{3}) \quad \cdots (\text{答})$$

