

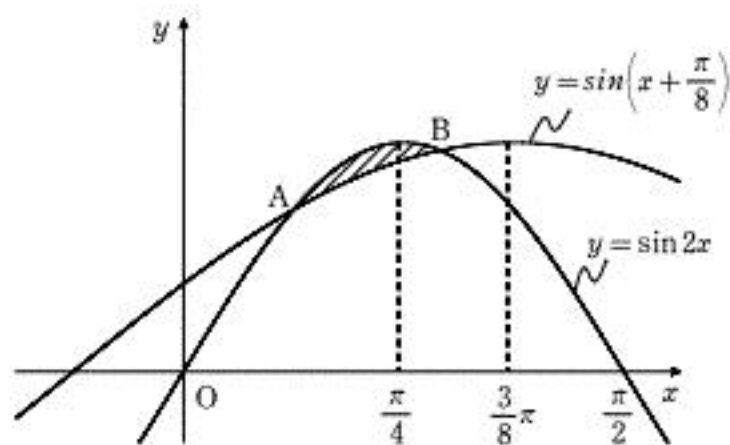
$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ と $y = \sin 2x$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ での
 グラフは右図のようになり、2 交点を図のように
 A、B とする。

A の x 座標は

$$x + \frac{\pi}{8} = 2x \text{ より, } x = \frac{\pi}{8}$$

B の x 座標は

$$\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + 2x = \pi \text{ より, } x = \frac{7}{24}\pi$$



また、2 つのグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域は図の斜線部分であり、

$$\frac{\pi}{8} < x < \frac{7}{24}\pi \text{ において, } \sin 2x > \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) > 0$$

であるから、求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} \left\{ \pi \sin^2 2x - \pi \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{8} \right) \right\} dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} \left\{ \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)}{2} \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi}{16}}} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

条件(a)より、

- (i) 隣り合う2つの角が 90° である
- (ii) 向かい合う2つの角が 90° である。

の2つの場合が考えられる。

四角形を $ABCD$ とし、その内接円の中心を O とする。また、内接円と辺 AB , BC , CD , DA の接点をそれぞれ E , F , G , H とする。さらに、四角形の面積を S とする。

(i)の場合

$\angle A = \angle B = 90^\circ$ としてもよい。

2つの四角形 $OEAH$, $OEBF$ はともに一辺の長さが1の正方形である。

接線の性質より、

$$\triangle OCF \equiv \triangle OCG, \triangle ODG \equiv \triangle ODH$$

であり、 $\angle COF = \alpha$ とおくと、

$$\angle DOH = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

したがって、 α の変域は

$$\alpha > 0^\circ \text{ かつ } 90^\circ - \alpha > 0^\circ \text{ より、 } 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

また、

$$CF = OF \tan \alpha = \tan \alpha, \quad DH = OH \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

以上より、

$$\begin{aligned} S &= 1 + 1 + 2\triangle OCF + 2\triangle ODH \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \\ &= 2 + \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned}$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より、 $\tan \alpha > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係を用いて、

$$\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \geq 2\sqrt{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\tan \alpha}} = 2$$

であり、等号が成り立つのは、

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \text{ かつ } 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \text{ すなわち } \alpha = 45^\circ$$

のときである。

ゆえに、 S の最小値は4

(ii)の場合

$\angle A = \angle C = 90^\circ$ としてもよい。

2つの四角形 $OEAH$, $OFCG$ はともに一辺の長さが1の正方形である。

接線の性質より、

$$\triangle OBE \equiv \triangle OBF, \triangle ODG \equiv \triangle ODH$$

であり、 $\angle BOE = \beta$ とおくと、

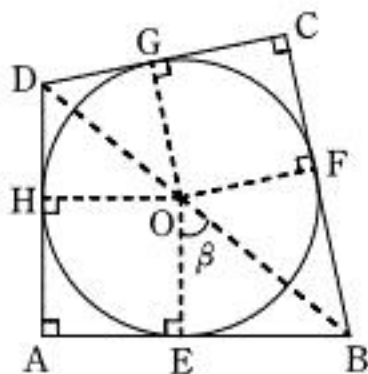
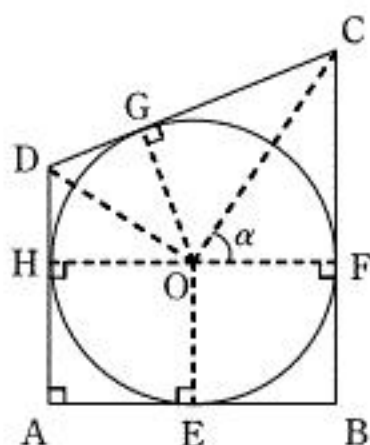
$$\angle DOH = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$$

以下、(i)の α を β に書き直せばよいから、

S の最小値は4

以上(i), (ii)より、

求める面積は 4 …… (答)



- (1) 接点を $(t, e^t + 1)$ とおく.

$(e^x + 1)' = e^x$ より, 接線の方程式は,

$$y = e^t(x - t) + e^t + 1$$

これが点 $(a, 0)$ を通る条件は,

$$0 = e^t(a - t) + e^t + 1$$

$$\Leftrightarrow a = t - e^{-t} - 1 \quad \dots\dots ①$$

ここで, $f(t) = t - e^{-t} - 1$ とおくと,

$$f'(t) = 1 + e^{-t} > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$$

であるから, tu 平面上で

直線 $u = a$ と曲線 $u = f(t)$ の共有点はただ 1 つである.

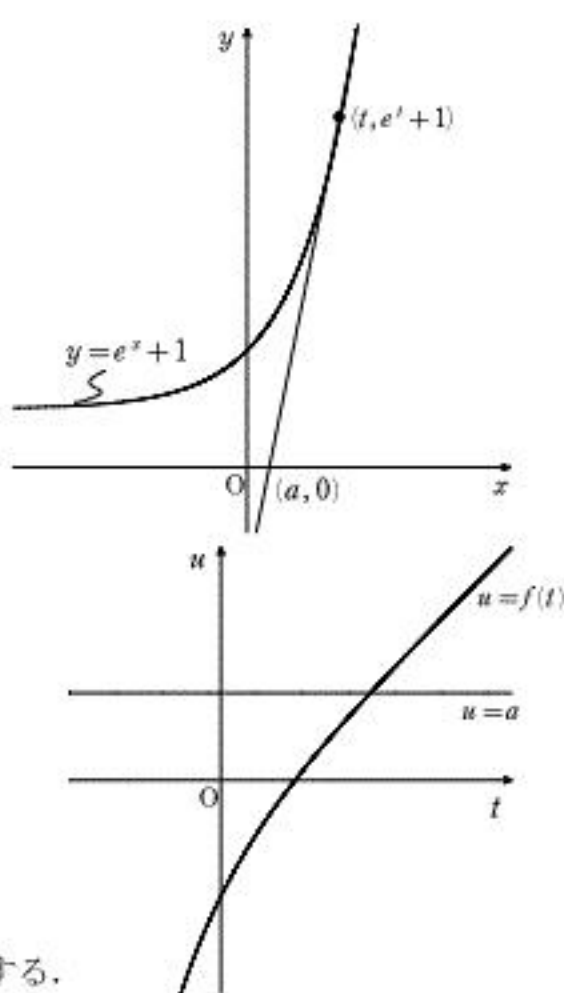
したがって,

t の方程式①はただ 1 つの実数解をもつ.

すなわち,

点 $(a, 0)$ を通り, $y = e^x + 1$ に接する直線はただ 1 つ存在する.

(証明おわり)



- (2) ①より, $n \geq 1$ のとき

$$a_n = a_{n+1} - e^{-a_{n+1}} - 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 + e^{-a_{n+1}} \quad \dots\dots ②$$

②より, $a_{n+1} - a_n > 1$

したがって, $n \geq 2$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) > n - 1$$

$$a_n - a_1 > n - 1$$

$$a_n > n \quad (a_1 = 1 \text{ より})$$

すなわち, $a_{n+1} > n + 1 \quad (n \geq 1)$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \infty$$

であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-a_{n+1}} = 0$$

これと②より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \underline{1} \quad \dots\dots (\text{答})$$

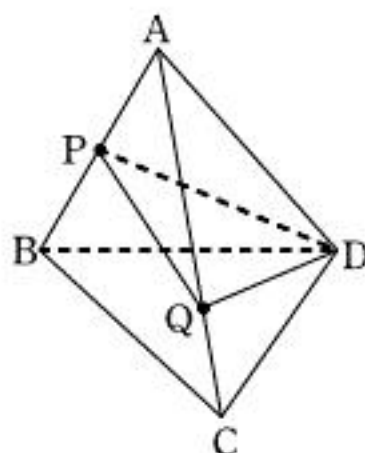
$AQ = x$ とおくと、 $0 \leq x \leq 1$ である。
 $x \neq 0$ のとき、 $\triangle APQ, \triangle ADQ$ に余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cos 60^\circ \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DQ^2 &= x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cos 60^\circ \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

これらは $x=0$ のときも成り立つ。

また、正三角形 DAB に着目して、 $DP = \frac{\sqrt{3}}{2}$



次に、 $\triangle PDQ$ に余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned} \cos \angle PDQ &= \frac{PD^2 + DQ^2 - PQ^2}{2PD \cdot DQ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (x^2 - x + 1) - \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{(3-x)^2}{x^2 - x + 1}} \quad (0 \leq x \leq 1 \text{ より } 3-x > 0) \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = \frac{(3-x)^2}{x^2 - x + 1} \left(= \frac{(x-3)^2}{x^2 - x + 1} \right)$ とおくと、

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(x^2 - x + 1) - (x-3)^2 \cdot (2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{(x-3)(5x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

よって、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{5}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	9	↗	$\frac{2^2 \cdot 7}{3}$	↘	4

$$\text{また、} \cos \angle PDQ = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{f(x)}$$

よって、 $\cos \angle PDQ$ の最大値は、

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2^2 \cdot 7}{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{3}}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$a \neq 0, d \neq 0$ より,

$$f(x) = g(x) \cdot (px + q) + r \quad (\text{ただし, } p, q, r \text{ は定数で, } p \neq 0)$$

とおける.

正の整数 n に対して,

$$\frac{f(n)}{g(n)} = pn + q + \frac{r}{g(n)}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $\frac{f(n+1)}{g(n+1)}, \frac{f(n)}{g(n)}$ はともに整数であるから,

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)} = p - \frac{dr}{g(n)g(n+1)} \quad (g(n) = dn + e \text{ より})$$

は整数であり, α_n (整数) とおくと,

$$p - \frac{dr}{g(n)g(n+1)} = \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

よって,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{2d^2r}{g(n)g(n+1)g(n+2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで, $r \neq 0$ と仮定すると, $d \neq 0$, $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ は整数であるから,

$$\frac{2d^2|r|}{g(n)g(n+1)g(n+2)} \text{ は } 1 \text{ 以上の整数 } (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ①$$

ところで, $g(n) = dn + e$, $d > 0$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2d^2|r|}{g(n)g(n+1)g(n+2)} = 0 \quad \dots\dots ②$$

①と②は矛盾するから, 仮定 $r \neq 0$ が誤りであり, $r = 0$ となる
よって $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる.

(証明おわり)

0以上の整数 n に対して、 $0 < x_n < 1$ であることを数学的帰納法で示す.

(i) $x_0 = \frac{1}{2}$ より、 $n=0$ のときは成り立つ.

(ii) $n=k(\geq 0)$ のとき成り立つと仮定すると、

$$0 < x_k < 1 \text{ であり、 } 0 < f_0(x_k) < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < f_1(x_k) < 1$$

よって、 $0 < x_{k+1} < 1$

以上より $n \geq 0$ で $0 < x_n < 1$ ①

次に、 $n \geq 0$ で、

$0 < x_n < \frac{1}{3}$ となる確率を a_n

$\frac{1}{3} < x_n < \frac{2}{3}$ となる確率を b_n

$\frac{2}{3} < x_n < 1$ となる確率を c_n

とすると、 $x_0 = \frac{1}{2}$ より、

$$a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0 \quad \text{.....②}$$

また、①より、

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad (n \geq 0) \quad \text{.....③},$$

ここに、

$$\begin{aligned} \cdot 0 < x_n < \frac{1}{3} \text{ のとき } & \begin{cases} 0 < f_0(x_n) < \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} < f_1(x_n) < \frac{2}{3} \end{cases} \\ \cdot \frac{1}{3} \leq x_n < \frac{2}{3} \text{ のとき } & \begin{cases} \frac{1}{6} \leq f_0(x_n) < \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \leq f_1(x_n) < \frac{5}{6} \end{cases} \\ \cdot \frac{2}{3} \leq x_n < 1 \text{ のとき } & \begin{cases} \frac{1}{3} \leq f_0(x_n) < \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \leq f_1(x_n) < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} + b_n \cdot \frac{1}{2} \\ b_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} + c_n \cdot \frac{1}{2} \\ c_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{2} + c_n \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

③を用いて、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - c_n) \quad \text{.....④}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n) \quad \text{.....⑤}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n) \quad \text{.....⑥}$$

⑤について、

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって、

$$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \quad (\text{②より}) \quad \text{.....⑤'}$$

次に④-⑥より、

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$

よって、

$$\begin{aligned} a_n - c_n &= (a_0 - c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 0 \quad (\text{②より, } a_0 - c_0 = 0) \end{aligned}$$

すなわち、

$$a_n = c_n \quad \text{.....⑦}$$

③, ⑦より、

$$2a_n + b_n = 1$$

$$a_n = \frac{1 - b_n}{2}$$

したがって、

$$P_n = a_n + b_n = \frac{1 + b_n}{2}$$

⑤'を用いて、

$$P_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \quad \text{.....(答)}$$