

$C: y = x^3 + x^2 - x$ について

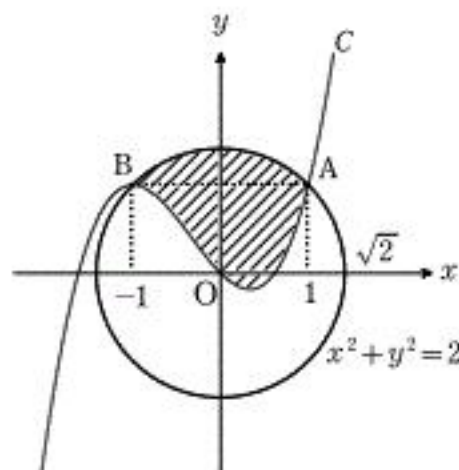
$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

より、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

また、 $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$ とおくと、2点 A , B は C 上、および円 $x^2 + y^2 = 2$ 上にあり、点 A は直線 $x=1$ 上に、点 B は直線 $x=-1$ 上にある。

以上から、求める面積を S とすると、 S は下図の斜線部分の面積である。



$y \leq 1$ の部分の面積を S_1 、 $y \geq 1$ の部分の面積を S_2 とする。

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 (1 - (x^3 + x^2 - x)) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

次に、 $OA = OB = \sqrt{2}$, $AB = 2$ より、 $\triangle OAB$ は $\angle AOB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから、

$S_2 =$ 半径 $\sqrt{2}$, 中心角 90° の扇形の面積 $- \triangle OAB$

$$= \pi (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

以上より、

$$S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}}} \quad \cdots \cdots \text{答}$$

題意より「はずれ」の表示される確率は毎回同じであり、それを p ($0 \leq p \leq 1$) とする。
 ボタンを n 回押したとき、1 回以上「あたり」の出る確率を q_n とすると、余事象を考えることにより、

$$q_n = 1 - p^n$$

条件 $q_{20} = \frac{36}{100}$ より、

$$1 - p^{20} = \frac{36}{100} \quad \text{すなわち、} \quad p^{20} = \frac{64}{100} \left(= \frac{2^6}{10^2} \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①と $0 \leq p \leq 1$ より、 $0 < p < 1$ $\cdots \cdots \textcircled{2}$

求める n は、

$$q_n \geq \frac{90}{100} \iff p^n \leq \frac{1}{10}$$

を満たす最小の自然数 n である。

②より、 $p^n > 0$ であるから、

$$\log_{10} p^n \leq \log_{10} \frac{1}{10}$$

$$n \log_{10} p \leq -1$$

②より、 $\log_{10} p < 0$ であるから、

$$n \geq \frac{-1}{\log_{10} p} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここに、①より、

$$\log_{10} p^{20} = \log_{10} \frac{2^6}{10^2}$$

$$\log_{10} p = \frac{1}{20} (6 \log_{10} 2 - 2) = \frac{3 \log_{10} 2 - 1}{10}$$

これを③に代入して、

$$n \geq \frac{10}{1 - 3 \log_{10} 2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}'$$

ここに、 $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より、

$$0.0967 < 1 - 3 \log_{10} 2 < 0.0970$$

$$\frac{10}{0.0970} < \frac{10}{1 - 3 \log_{10} 2} < \frac{10}{0.0967}$$

であり、

$$\frac{10}{0.0970} = 103.09 \cdots \cdots$$

$$\frac{10}{0.0967} = 103.41 \cdots \cdots$$

であるから、

$$103 < \frac{10}{1 - 3 \log_{10} 2} < 104$$

よって、③'を満たす最小の自然数は 104 であり、最低 104 回押せばよい。 $\cdots \cdots$ 答

n 進法の 2, 12, 1331 を十進法で表すと, $n \geq 4$ より,

$$2_n = 2$$

$$12_n = 1 \cdot n + 2 = n + 2$$

$$1331_n = 1 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

よって, 条件を十進法で表すと,

$$2^{n+2} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

以下, 十進法とする.

$$2^{n+2} = n+1^3 \quad \dots\dots ①$$

①の左辺の素因数は 2 のみである. よって, ①の右辺の素因数も 2 のみであり,

$$n+1 = 2^m \quad n \geq 4 \text{ より, } m \text{ は } 3 \text{ 以上の整数}$$

したがって, ①は

$$2^{2^m+1} = 2^{3m}$$

$$2^m + 1 = 3m \quad \dots\dots ①'$$

$m=3$ は ①' を満たす, $\dots\dots ②$

次に「 $m \geq 4$ のとき, $2^m + 1 > 3m \quad \dots\dots *$ 」を m についての数学的帰納法で示す.

I $m=4$ のとき $2^m + 1 = 17, 3m = 12$ より, (*) は成り立つ.

II $m=k \geq 4$ のとき, (*) が成り立つと仮定して, $m=k+1$ のときを考察する.

$$\begin{aligned} 2^{k+1} + 1 - 3(k+1) &= 2 \cdot 2^k - 3k - 2 \\ &> 2 \cdot 3k - 1 - 3k - 2 \quad \text{仮定より} \end{aligned}$$

すなわち,

$$2^{k+1} + 1 - 3(k+1) > 3k - 4 > 0 \quad k \geq 4 \text{ より}$$

したがって, $m=k+1$ のときも (*) が成り立つ.

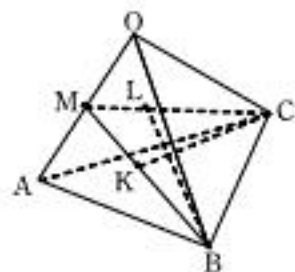
以上 I, II より,

「 $m \geq 4$ のとき, $2^m + 1 > 3m$ 」が成り立つ.

これと ②より, ①' を満たす m は

$$m=3$$

よって, $n = 2^m - 1 = \underline{\underline{7}} \quad \dots\dots \text{答}$



OA の中点を M とし, $\triangle OAB, \triangle OAC$ の重心をそれぞれ K, L とする.
 K, L はそれぞれ線分 BM, CM を 2:1 に内分する点であるから,
 (BL, CK は平面 BCM 上の平行でない)
 2 線分である.①

条件より, $BL \perp$ 平面 OAC より, $BL \perp OA$ ②

②と同様にして, $CK \perp OA$ ③

①, ②, ③ より, $OA \perp$ 平面 BCM

よって, $OA \perp BM, OA \perp CM$

これと, 点 M は OA の中点であることから,

$$BO = BA, CO = CA \quad \dots\dots④$$

OB の中点, OC の中点についても, ④と同様にして, それぞれ

$$CO = CB, AO = AB \quad \dots\dots⑤$$

$$AO = AC, BO = BC \quad \dots\dots⑥$$

④, ⑤, ⑥ より, 6 つの辺の長さが等しくなり, 四面体 OABC は正四面体である.

(証明終)

以下では複合は全て同順とする.

条件(ロ)より, $f x = 0$ は虚数解を少なくともひとつもつ. それを α とすると, $f x$ が実数係数であることから, α と共役な虚数 β も解としてもつ.

その他の解を γ とすると, $f x = 0$ の解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = -a \quad \text{すなわち, } \gamma = -a - \alpha + \beta$$

となって, γ は実数である.

条件(イ)から, γ^3 も $f x = 0$ の実数解であるが, 実数解は γ のみであったから,

$$\gamma^3 = \gamma \quad \text{すなわち, } \gamma = 0, \pm 1$$

である.

次に, α^3, β^3 も $f x = 0$ の解であり,

i $\alpha^3 = 0$ のとき, α が実数となって条件(ロ)に反す.

ii $\alpha^3 = 1$ のとき, $\alpha = 1$ は条件(ロ)に反し,

$$\alpha, \beta = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right)$$

iii $\alpha^3 = -1$ のとき, $\alpha = -1$ は条件(ロ)に反し,

$$\alpha, \beta = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right)$$

iv $\alpha^3 = \alpha$ のとき, $\alpha = 0, \pm 1$ は条件(ロ)に反し不適當.

v $\alpha^3 = \beta$ のとき, $\beta^3 = 0$ は条件(ロ)に反し,

$\beta^3 = \pm 1, \beta$ のときは ii, iii, iv と同様であり,

$$\begin{cases} \alpha^3 = \beta \\ \beta^3 = \alpha \end{cases}$$

のみ考えればよい. 2 式の和差をとって

$$\begin{cases} \alpha + \beta & \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha + \beta \\ \alpha - \beta & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = -\alpha - \beta \end{cases}$$

$\alpha + \beta = 0$ のときは $\alpha, \beta = \pm i, \mp i$ となり, $\alpha + \beta \neq 0$ ならば $\alpha \neq \beta$ であることも考慮し,

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 1 \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = -1 \end{cases}$$

さらに 2 式の和差をとり,

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 0 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

が成立するが, $\alpha + \beta$ が実数であることから

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 + 2 = 0$$

は成立しえず不適當.

以上のことをまとめると

$$\alpha, \beta, \gamma = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2}, 1 \right), \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}, -1 \right), \\ \pm i, \mp i, 0, \pm i, \mp i, 1, \pm i, \mp i, -1$$

これらを解にもつ 3 次方程式 $f x = x - \alpha \quad x - \beta \quad x - \gamma$ は

$$f x = \underline{x^3 - 1, x^3 + 1, x^3 + x, x^3 - x^2 + x - 1, x^3 + x^2 + x + 1} \quad \cdots \cdots \text{答}$$