

(1) $f_n(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin^{n-1} \theta$ より,

$$\begin{aligned} f'_n(\theta) &= -\sin \theta \sin^{n-1} \theta + (1 + \cos \theta)(n-1) \sin^{n-2} \theta \cos \theta \\ &= \sin^{n-2} \theta \{n \cos^2 \theta + (n-1) \cos \theta - 1\} \\ &= \sin^{n-2} \theta (\cos \theta + 1)(n \cos \theta - 1) \end{aligned}$$

$n \geq 2$ から, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$\cos \theta = \frac{1}{n}$$

を満たす θ はただ一つ存在するので, それを α とする.
このとき $f_n(\theta)$ の増減は右の表のようになる.

したがって最大値は

$$\begin{aligned} M_n &= f_n(\alpha) \\ &= (1 + \cos \alpha) \sin^{n-1} \alpha \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'_n(\theta)$		+	0	-	
$f_n(\theta)$	0	↗		↘	1

(2) (1)の結果から,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left\{ \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} \right\}^{-\frac{n(n-1)}{2n^2}} \\ &= e \cdot e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \underline{\underline{e^{\frac{1}{2}}}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$p^q + q^p = N \quad \dots\dots\dots \textcircled{1} \text{ とおく.}$$

p, q がともに奇数とすると, N は偶数となる. また, $p \geq 3, q \geq 3$ より $N \geq 54$ である.
 これは N が素数であることに反する. よって, p, q の少なくとも一方は偶数である.
 また p, q は素数であり, $\textcircled{1}$ は p と q に関して対称である.

よって, $q=2$ としてよく, $\textcircled{1}$ は

$$N = p^2 + 2^p$$

ここで, $p=2$ とすると,

$$N = 8$$

であり, これは N が素数であることに反する.
 よって, p は 3 以上の素数である.

次に, $p = 3n \pm 1$ (n は 2 以上の整数) のとき,

$$\begin{aligned} N &= (3n \pm 1)^2 + \{3 + (-1)\}^p \\ &= 9n^2 \pm 6n + 1 + \sum_{k=0}^p {}_p C_k 3^k (-1)^{p-k} \\ &= \left\{ 9n^2 \pm 6n + \sum_{k=0}^p {}_p C_k 3^k (-1)^{p-k} \right\} + 1 + (-1)^p \end{aligned}$$

上式の _____ は 3 の倍数であり, p は 3 以上の素数より, $1 + (-1)^p = 0$

よって, N は 3 の倍数である. また, $N = p^2 + 2^p > p^2 \geq 9$

これは N が素数であることに反する.

したがって, p は 3 の倍数である.

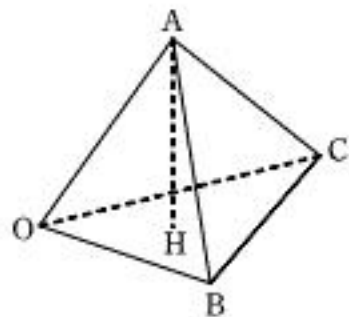
また, p は素数であるから, $p=3$ でなければならない.

このとき,

$$N = 3^2 + 2^3 = 17$$

であり, N は素数である.

以上より, 素数 $p^q + q^p$ は 17(答)



点 A から平面 OBC へ下ろした垂線と平面 OBC の交点を H とすると、

$$\begin{cases} AO^2 = AH^2 + OH^2 \\ AB^2 = AH^2 + BH^2 \\ AC^2 = AH^2 + CH^2 \end{cases}$$

また、H は $\triangle OBC$ の外心であるから、

$$OH = BH = CH$$

以上より、 $AO = AB = AC$ ①

次に、点 B から平面 OCA へ下ろした垂線、点 C から平面 OAB へ下ろした垂線についても、
①と同様にして、それぞれ

$$BO = BC = BA \quad \text{.....②}$$

$$CO = CA = CB \quad \text{.....③}$$

を得る、

①、②、③ より、6 つの辺の長さが等しくなり、四面体 OABC は正四面体である、

(証明終)

図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F とし、その体積を V とする。
 F を平面 $y=t$ ($0 \leq t \leq \log a$) で切断したときの断面は図形 D を $y=t$ で
 切断してできる線分

$$\left\{ (x, y, z) \mid |x| \leq \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1, y = z = t \right\}$$

を y 軸のまわりに回転してできる図形である。平面 $y=t$ 上の点を

$$A\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1, t, t\right), B(0, t, t), T(0, t, 0)$$

とすると、断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi(TA^2 - TB^2) \\ &= \pi\left\{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1\right)^2 + t^2 - t^2\right\} \\ &= \pi\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

と得られる。

したがって、求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\log a} S(t) dt \\ &= \int_0^{\log a} \pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1\right)^2 dt \\ &= \pi \int_1^a \left(\frac{s + s^{-1}}{2} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{s} ds \quad (s = e^t \text{ と置換}) \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^a (s + s^{-3} + 6s^{-1} - 4s^{-2} - 4) ds \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^{-2} + 6\log|s| + 4s^{-1} - 4s \right]_1^a \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2a^2} + 6\log a + \frac{4}{a} - 4a \right) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

n ($n \geq 0$) 秒後に X の x 座標が $0, 1, 2$ である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とする。
このとき、

$$p_0 = 1, q_0 = r_0 = 0$$

である。 X の x 座標を s とすると、与えられた規則から、 X の y 座標によらず

$$s = 0 \text{ のとき, } 1 \text{ 秒後に } s = 0, 1 \text{ にそれぞれ確率 } \frac{1}{2}$$

$$s = 1 \text{ のとき, } 1 \text{ 秒後に } s = 0, 1, 2 \text{ にそれぞれ確率 } \frac{1}{3}$$

$$s = 2 \text{ のとき, } 1 \text{ 秒後に } s = 1, 2 \text{ にそれぞれ確率 } \frac{1}{2}$$

で移動するので

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n & \dots\dots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n & \dots\dots ③ \end{cases}$$

まず $p_n + q_n + r_n = 1$ であることに注意して、②から

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n)$$

$$q_{n+1} = -\frac{1}{6}q_n + \frac{1}{2}$$

$$q_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(q_n - \frac{3}{7}\right)$$

よって $\left\{q_n - \frac{3}{7}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であり、

$$q_n - \frac{3}{7} = \left(q_0 - \frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^n = -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに, } q_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \dots\dots ④$$

また、①-③から

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - r_n)$$

よって $\{p_n - r_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であり、

$$p_n - r_n = (p_0 - r_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots\dots ⑤$$

④、⑤を再び $p_n + q_n + r_n = 1$ に用いると、

$$p_n + \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + p_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \quad \text{ゆえに, } \underline{\underline{p_n = \frac{2}{7} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$f(x) = x^2 + ax + b$ に対して(イ)の条件から、ある整式 $Q(x)$ を用いて、

$$f(x^3) = f(x)Q(x) \quad \dots\dots ①$$

と表せる。いま、 $f(x) = 0$ は 2 次方程式であるから解を 2 つもち、それを α, β とする。

$f(\alpha) = f(\beta) = 0$ であり、①に $x = \alpha, \beta$ を代入すると、

$$\begin{cases} f(\alpha^3) = f(\alpha)Q(\alpha) = 0 \\ f(\beta^3) = f(\beta)Q(\beta) = 0 \end{cases}$$

つまり、 α^3, β^3 も $f(x) = 0$ の解である。 $f(x) = 0$ の解は α, β で尽くされているので、

$$\alpha^3, \beta^3 \in \{\alpha, \beta\}$$

である。

(i) $\alpha^3 = \alpha$ のとき、 $\alpha = 0, \pm 1$ であり

・ $\beta^3 = \alpha$ のとき、 $\beta^3 = 0, \pm 1$ から

$$(\alpha, \beta) = (0, 0), (1, 1), \left(1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right), (-1, -1), \left(-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)$$

ただし、 i は虚数単位とする。

・ $\beta^3 = \beta$ のとき、

$$(\alpha, \beta) = (0, 0), (0, \pm 1), (1, 0), (1, \pm 1), (-1, 0), (-1, \pm 1)$$

$f(x) = 0$ の解と係数の関係より

$$-a = \alpha + \beta, b = \alpha\beta$$

であるから、(ロ)の条件を満たすものは

$$(\alpha, \beta) = \left(1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right), \left(-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)$$

のみ。つまり、

$$(a, b) = \left(-\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right), \left(-\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, -\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)$$

複合は同順。

(ii) $\alpha^3 = \beta$ のとき

・ $\beta^3 = \alpha$ のとき、 $\alpha^3 = \alpha$ より $\alpha = 0, \pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ から

$$(\alpha, \beta) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1), (i, -i), (-i, i),$$

$$\left(\frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}}, \frac{\mp 1 + i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\pm 1 - i}{\sqrt{2}}, \frac{\mp 1 - i}{\sqrt{2}}\right)$$

複合は同順。

・ $\beta^3 = \beta$ のとき、これは(i)の前半を α, β を交換することで結果が得られる。

$f(x) = 0$ の解と係数の関係より

$$-a = \alpha + \beta, b = \alpha\beta$$

であるから、(ロ)の条件を満たすものは(i)と重複するものを除くと)

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}}, \frac{\mp 1 + i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\pm 1 - i}{\sqrt{2}}, \frac{\mp 1 - i}{\sqrt{2}}\right)$$

である。複合は同順。

つまり

$$(a, b) = (\pm\sqrt{2}i, -1)$$

以上のすべての場合に対して $\alpha \neq \beta$ であり、 $f(x^3) = 0$ は $x = \alpha, \beta$ を解としてもつから

①が成立する。したがって求める $f(x)$ は

$$f(x) = x^2 - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}x + \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, x^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}x - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, x^2 \pm \sqrt{2}ix - 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

複合は同順。