

1 $f(x)=x^3-4x+1$ とする. C と l の接点を $(t, f(t))$ とすると,

$f'(x)=3x^2-4$ より, l は

$$y-(t^3-4t+1)=(3t^2-4)(x-t)$$

$$y=(3t^2-4)x-2t^3+1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

これが $P(3, 0)$ を通るから,

$$0=3(3t^2-4)-2t^3+1$$

$$2t^3-9t^2+11=0$$

$$(t+1)(2t^2-11t+11)=0$$

$$t=-1, \frac{11 \pm \sqrt{33}}{4}$$

l の傾きは負であるから, $3t^2-4 < 0$, すなわち $-\frac{2}{\sqrt{3}} < t < \frac{2}{\sqrt{3}}$

よって, $t=-1$

①に代入して,

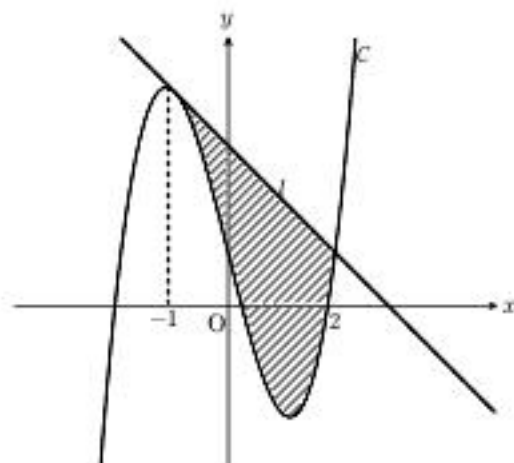
$$l: y=-x+3$$

ここで,

$$\begin{aligned} f(x)-(-x+3) &= x^3-3x-2 \\ &= (x+1)^2(x-2) \end{aligned}$$

であり, C と l で囲まれた部分は

図の斜線部分であるから,



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(-x+3)-f(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^3+3x+2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{27}{4} \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (1) 求める数は 2^n (n は非負整数) で表される数であり、100 桁以下のものは

$$2^n < 10^{100} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

をみたす非負整数 n の個数に等しい。①の両辺の常用対数をとると、

$$n \log_{10} 2 < 100 \quad \therefore n < \frac{100}{\log_{10} 2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より、

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10} 2} < \frac{100}{0.3010} \quad \therefore 332.11 < \frac{100}{\log_{10} 2} < 332.23$$

よって、②をみたす n の個数は

$$333 \text{ (個)} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

- (2) 題意の数は $2^a \cdot 10^b$ または $5^a \cdot 10^b$ (a, b は非負整数) の形で表されるもののうち、

$$10^{99} \leq 2^a \cdot 10^b < 10^{100} \quad \text{または} \quad 10^{99} \leq 5^a \cdot 10^b < 10^{100} \\ \therefore 10^{99-b} \leq 2^a < 10^{100-b} \quad \text{または} \quad 10^{99-b} \leq 5^a < 10^{100-b} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

をみたすものである。 $b = 0, 1, \cdots, 99$ に対して③をみたす 2^a および 5^a を

みたすものの総数はそれぞれ「100 桁以下の自然数で 2 以外の素因数をもたないもの」

「100 桁以下の自然数で 5 以外の素因数をもたないもの」の個数であり、(1)と同様に
してそれぞれ 333 個、144 個である。 $2^0 = 5^0 = 1$ を重複して数えているので、

求める個数は

$$333 + 144 - 1 = 476 \text{ (個)} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

3 R から直線 l に下した垂線を RH とすると、 $\triangle PQR$ は正三角形なので

$$PQ = \frac{2}{\sqrt{3}}RH \text{ であり,}$$

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot RH \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}RH = \frac{1}{\sqrt{3}}RH^2$$

以下 RH が最小となる場合を考える.

$$\overrightarrow{CB} = (2, 0, 4) \quad \overrightarrow{\parallel}(1, 0, 2)(=\overrightarrow{m} \text{ とする})$$

であるから、実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{m}$$

と表せる.

また、 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{l}$ とすると、実数 t を用いて $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{l}$ と表せる.
よって、

$$\overrightarrow{HR} = \overrightarrow{OR} + s\overrightarrow{m} - t\overrightarrow{l}$$

$\overrightarrow{HR} = \overrightarrow{OX}$ とすると、 X は B を通って、 $\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}$ で張られる平面 α 上の点で、
 OX が最小となる. つまり、 RH が最小となるのは、

$$\overrightarrow{OX} \perp \alpha \quad \therefore \begin{cases} \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{m} = 0 \\ \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{l} = 0 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{m} = 2, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{l} = -1, |\overrightarrow{m}|^2 = 5, |\overrightarrow{l}|^2 = 2, \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{l} = 2$ を $\textcircled{1}$ に用いて

$$\begin{cases} 2 + 5s - 2t = 0 \\ -1 + 2s - 2t = 0 \end{cases} \quad \therefore s = -1, t = -\frac{3}{2}$$

したがって、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{m} = (-1, 2, -1), \overrightarrow{OH} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{l} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

である. このとき、

$$HR = \sqrt{(-1-0)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1+\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

H は PQ の中点であり、 $PH = QH = \frac{1}{\sqrt{3}}RH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ なので、 P, Q は

$$\overrightarrow{OH} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{l}}{|\overrightarrow{l}|} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{l} \pm \frac{1}{2}\overrightarrow{l} = -\overrightarrow{l}, -2\overrightarrow{l}$$

つまり、 P, Q の座標は $P(0, 1, -1), Q(0, 2, -2)$

または $P(0, 2, -2), Q(0, 1, -1) \cdots \cdots$ (答)

R の座標は $(-1, 2, -1) \cdots \cdots$ (答)

$\tan x$ の周期は π であり、条件は $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ であるので、 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えればよい。

さらに、 $p \geq 1, q \geq 1$ であるから $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}, 0 < \beta \leq \frac{\pi}{4}$ と考えてよい。

(1) $q = 1$ のとき、 $\beta = \frac{\pi}{4}$ であり、

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

となつて、題意の等式が成立しない。

$q \neq 1$ のとき、 $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ であるから、 $0 < \tan \beta < 1$ かつ $\tan 2\beta$ は存在し $0 < \tan 2\beta$ をみたく、

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan \alpha \tan 2\beta} = 2$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{2 - \tan 2\beta}{1 + 2 \tan 2\beta} \dots\dots \textcircled{1}$$

また、 $\tan \beta = \frac{1}{q}$ より、

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{q}}{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^2} = \frac{2q}{q^2 - 1}$$

$q = 2, 3$ のとき、 $\textcircled{1}$ から

$$(q, \tan 2\beta, \tan \alpha) = \left(2, \frac{4}{3}, \frac{2}{11}\right), \left(3, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

となつて、 $(p, q) = (2, 3)$ のみが題意をみたす。

以上から、求める p, q の値は $p = 2, q = 3 \dots\dots$ (答)

(2) $q > 3$ のとき、 $\tan \beta = \frac{1}{q} < \frac{1}{3}$ かつ $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$0 < \tan 2\beta < \frac{3}{4}$$

である。 $\textcircled{1}$ から

$$\tan \alpha = \frac{2 - \tan 2\beta}{1 + 2 \tan 2\beta} = \frac{5}{2(1 + 2 \tan 2\beta)} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

よつて、 $\frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ であるが、 $p = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、 $\tan 2\beta = \frac{1}{3}$

$$\frac{2q}{q^2 - 1} = \frac{1}{3} \quad \therefore q^2 - 6q - 1 = 0$$

これをみたす整数 q は存在せず不適当。

(1) M, L の組合わせは

$$(M, L) = (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$$

の 5 通りである.

毎回 M または L が出る確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ であり, このうち,

題意をみたさない事象は

・ 毎回 M が出る ・ 毎回 L が出る

の 2 つである.

以上より, 求める確率は

$$5 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot 2 \right] = \underline{\underline{5 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 10 \left(\frac{1}{6}\right)^n}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) M, L の組合わせは $(M, L) = (6, 1)$ のみである.

したがって, 求める確率は,

「少なくとも 1 回 6 が出て (事象 A とする), かつ
少なくとも 1 回 1 が出る (事象 B とする)」

確率 $P(A \cap B)$ であり,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \end{aligned}$$

ここで,

$\overline{A}$: 6 が出ない, $\overline{B}$: 1 が出ない, $\overline{A} \cap \overline{B}$: 6, 1 が出ない

であるから,

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n, P(\overline{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

以上より,

$$P(A \cap B) = \underline{\underline{1 - 2 \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$